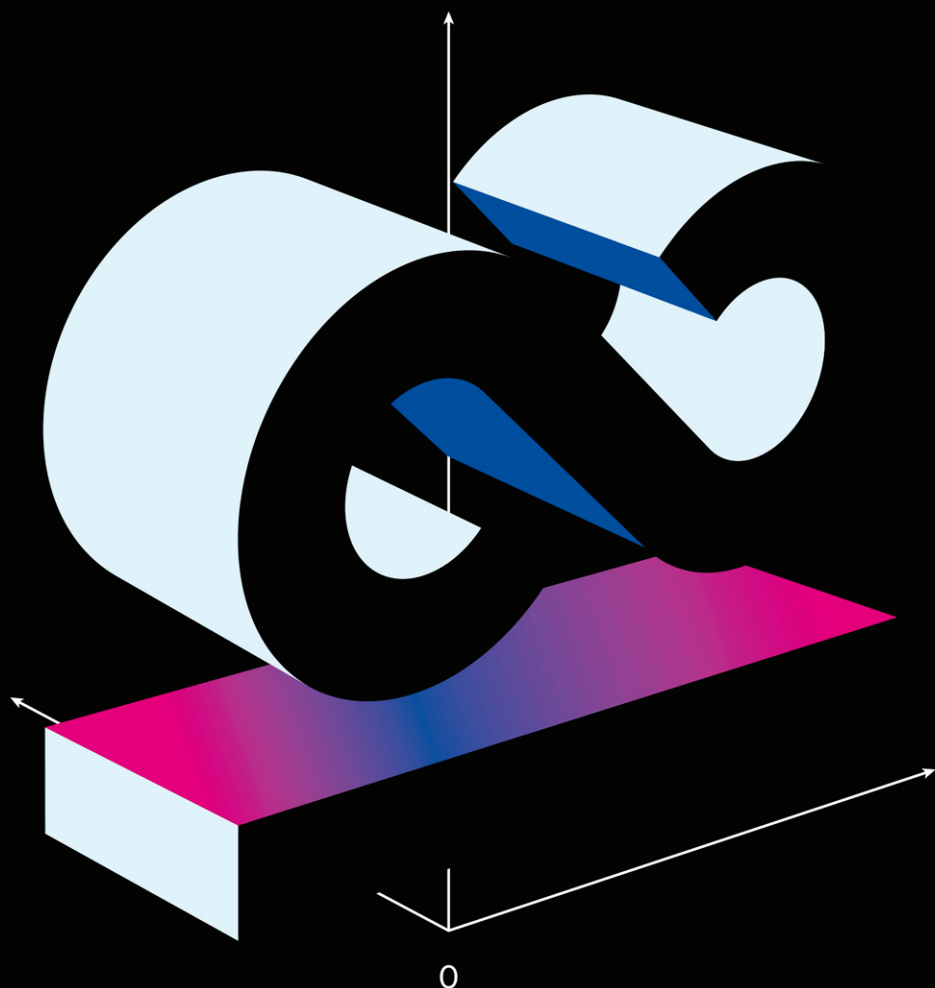


Иэн Стюарт



УКРОЩЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОСТИ

История математики
от первых чисел
до теории хаоса

IAN STEWART

TAMING THE INFINITE

THE STORY OF
MATHEMATICS

Quercus

ИЭН СТЮАРТ

УКРОЩЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОСТИ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ
ОТ ПЕРВЫХ ЧИСЕЛ ДО ТЕОРИИ ХАОСА

2019

УДК 51
ББК 22.1г
С88

Стюарт, Иэн

С88 Укрощение бесконечности. История математики от первых чисел до теории хаоса / Иэн Стюарт ; пер. с англ. Е. Погосян ; [науч. ред. И. Ефишов]. — М. : Манн, Иванов и Фербер, 2019. — 443 с.

ISBN 978-5-00117-455-4

Профессор Иэн Стюарт в увлекательной манере и с юмором рассказывает о том, как развивалась математика — с древнейших времен и до наших дней. Он рассматривает наиболее значимые темы и события, обращая особое внимание на их прикладной характер.

Вы познакомитесь с виднейшими математиками своих эпох, а также узнаете, как то или иное математическое открытие повлияло на нас и нашу историю.

Эта книга для математиков и всех, кто интересуется историей математики и науки вообще.

УДК 51
ББК 22.1г

ISBN 978-5-00117-455-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 9

Глава 1. Символы, единицы счета и глиняные таблички 13
Рождение чисел

Глава 2. Логика формы 29
Первые шаги в геометрии

Глава 3. Народы и числа 59
Откуда взялись привычные нам цифры

Глава 4. Соблазнение неизвестным 78
Коварный икс

Глава 5. Вечные треугольники 101
Тригонометрия и логарифмы

Глава 6. Кривые и координаты 120
Геометрия — это алгебра — это геометрия

Глава 7. Такие разные числа 135
Начала теории чисел

Глава 8. Система мира 159
Изобретение исчисления

Глава 9. Примеры в природе 185
Формулирование физических законов

Глава 10. Невозможные величины 206
Квадратные корни отрицательных чисел: возможно ли?

Глава 11. Прочные основы 222
Что заставило ученых обратиться к исчислению

8 УКРОЩЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Глава 12. Невозможные треугольники 238

Евклидова геометрия — единственно верная или нет?

Глава 13. Расцвет симметрии 258

Как не решить уравнение

Глава 14. Взросление алгебры 280

Числа прокладывают путь структурам

Глава 15. Геометрия на резиновом листе 302

Количество переходит в качество

Глава 16. Четвертое измерение 328

Геометрия за пределами нашего мира

Глава 17. Форма логики 352

Подведение под математику непоколебимого фундамента

Глава 18. Насколько это вероятно? 380

Рациональный подход к случайности

Глава 19. Мельницы для чисел 394

Вычислительные машины и вычислительная математика

Глава 20. Хаос и сложность 408

Упорядоченный беспорядок

Дополнительная литература 429

Указатель 432

Авторские права на иллюстрации 444

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика не появилась сразу в готовом виде. Она возникла постепенно, усилиями тысяч людей из разных культур, говоривших на многих языках. Ее постулаты, актуальные и по сей день, насчитывают более 4000 лет.

Многие человеческие открытия оказались недолговечными. Так, инженерное решение относительно дизайна колес было очень важным в Египте времен Нового царства, но сейчас мало кто назовет его прорывным. Математика же никогда не теряла своего значения. Едва успев оформиться, очередное ее открытие становилось необходимым для каждого и начинало жить своей жизнью. Важные математические идеи редко выходили из моды, хотя применять их можно было по-разному. Способы решения уравнений, открытые еще вавилонянами, используются до сих пор. Да, мы отказались от их символов, но отрицать историческую связь нельзя. Львиная доля основ математики, преподаваемых в школе, насчитывает не меньше 200 лет. Принятый в 1960-х гг. «современный» курс отсылает нас к XIX в. Однако, несмотря на внешнюю консервативность, математика шла вперед. В наши дни за неделю делается столько же математических открытий, сколько вавилонянам удавалось совершить за 2000 лет.

Развитие цивилизации всегда шло рука об руку с развитием математики. Без открытий в тригонометрии, сделанных древними греками, арабами и индусами, плавать по океанам во времена Великих географических открытий было бы гораздо опаснее. Торговые пути из Китая в Европу и из Индонезии в обе Америки проложены по невидимой математической нити. Трудно представить современное общество без математики. Практически всё, что нам сейчас кажется естественным, — от телевидения до мобильных телефонов, от гигантских пассажирских лайнеров до спутниковых навигационных систем в автомобилях, от расписаний поездов до медицинских обследований — опирается на ее выкладки и методы. Иногда им тысячи лет, порой всего несколько дней. Большинство даже не отдают себе отчета в их незримом присутствии в каждом из чудес современной технологии.

Это очень грустно, поскольку иные думают, будто в новых технологиях есть некое волшебство, и ожидают новых чудес каждый день. В то же время это естественно и позволяет нам легко и без сомнений применять чудеса на практике. Пользователю ни к чему загружать мозг лишней информацией о подноготной их работы. Если бы каждого потенциального пассажира проверяли на знание тригонометрии перед посадкой на самолет, вряд ли кто-то куда-то смог бы улететь.

Пожалуй, написать ясную историю математики — задача невыполнимая. Сегодня это настолько обширная, сложная и высокотехнологичная область, что даже эксперту едва ли будет под силу создать такой талмуд. Ближе всего к этой цели сумел подобраться Моррис Клайн в работе «Математическая мысль от древности до наших дней». Там всего-то 1200 страниц мелким шрифтом и вовсе ничего не сказано о последней сотне лет.

Моя книга гораздо короче, посему мне не раз приходилось делать выбор, особенно в отношении истории математики XX и XXI вв.

Я отлично помню о темах, которые опустил. Здесь нет алгебраической геометрии, теории гомологий, метода конечных элементов или вейвлетов. На самом деле список пропущенных тем намного длиннее оглавления. Прежде всего я думал о том, какие базовые знания хотели бы получить читатели и какие из новейших идей более всего нуждаются в доходчивом объяснении.

Истории в книге размещены не в хронологическом порядке, а объединены по темам. В противном случае пришлось бы постоянно перескакивать с одного на другое, и в итоге потерялась бы нить повествования. Такая книга была бы нечитабельна, хотя и приближена к реальности. Поэтому в каждой главе я сначала делаю экскурс в историю, а затем двигаюсь по основным вехам развития вопроса. В первых главах я глубже всего ухожу в прошлое, а ближе к концу книги больше внимания уделяю современности.

Главной целью для меня было передать дух современной математической науки — примерно за последние 100 лет. Я старался выбирать темы, чаще всего оказывающиеся на слуху, и соотносить их с историческим контекстом. Отсутствие какой-то темы не значит, что я считаю ее неважной. Однако, по-моему, нецелесообразно в популярном издании тратить несколько страниц на историю Эндрю Уайлса, доказавшего Великую теорему Ферма (да многие читатели знают ее и без меня), или, скажем, на некоммутативную геометрию, одно вступление к которой займет несколько глав.

В общем, эта книга — история и в то же время не история. Она повествует о прошлом, но предназначена не для профессиональных историков, не содержит тонких определений, столь важных для них, и по большей части описывает прошлое с современной точки зрения. Я знаю, что последнее — непростительный грех для историка. Ведь читатель может решить, будто древние каким-то чудом научились мыслить по-современному. Однако я считаю одновременно оправданным и необходимым начинать с того, что нам известно,

и двигаться к источнику идеи. Ведь греки изучали эллипсы вовсе не для того, чтобы Кеплер когда-нибудь создал теорию о планетарных орбитах, как и сам Кеплер сформулировал свои три закона движения небесных тел не для того, чтобы Ньютон переработал их в теорию всемирного тяготения. Однако история законов Ньютона уходит корнями в греческие исследования эллипсов и кеплеровский анализ данных астрономических наблюдений.

Сквозная тема этой книги — прикладной характер математики. Здесь у меня получился весьма эклектичный набор приложений как из прошлого, так и из настоящего. Повторюсь: если какая-то тема пропущена, это вовсе не значит, что я считаю ее несущественной.

Математика имеет длинную и славную, хоть и изрядно подзабытую историю. Не стоит недооценивать ее влияние на развитие нашей культуры. Если эта книга познакомит вас хотя бы с частью этой истории, значит, я добился своей цели.

ГЛАВА 1

СИМВОЛЫ, ЕДИНИЦЫ СЧЕТА

И ГЛИНЯНЫЕ ТАБЛИЧКИ

Рождение чисел

Математика начинается с чисел, и числа остаются ее основой, хотя сама наука давно ушла от простых операций с ними. Выстраивая на основе чисел всё более отвлеченные и сложные концепции, она развилась в обширную и разнообразную область мысли, выходящую далеко за рамки школьной программы. Современная математика больше занимается исследованием формы, структуры и составляющих нашего мира, нежели числами как таковыми. Ее методы стали очень отвлеченными и часто абстрактными. Она задает направление в науке, промышленности, бизнесе и даже искусстве. Математика универсальна и вездесуща.

Всё начинается с чисел

За тысячелетия математики — представители разных культур — успели создать на основе чисел множество надстроек: геометрию, исчисление, динамику, теорию вероятностей, топологию, теорию хаоса, сложности и т.д. Журнал *Mathematical Reviews*, где приводятся ссылки на все новые материалы, выделяет в ней

более 100 основных областей, содержащих не одну тысячу более узких. По всему миру насчитывается свыше 50 тыс. математиков-исследователей, и каждый год они публикуют более миллиона страниц научных текстов. Всё это новые открытия, а не вариации на тему уже существующих.

Математики часто пользуются логикой для создания еще более фундаментальной концепции, чем числа, — это математическая ло-

гика и теория множеств. Однако и здесь отправной точкой остается идея числа.

Числа кажутся простыми и понятными, но их внешняя простота обманчива

Числа кажутся простыми и понятными, но их внешняя простота обманчива. Операции с ними порой чрезвычайно сложны, и верный результат требует немалого труда. Но и тут намного легче

оперировать числами, чем физическими объектами, которые они описывают. Да, они подразумевают предметы, но не являются ими: вы можете подержать в руках две чашки, но не число 2. Числа выражаются символами, но разные культуры используют разные знаки для одних и тех же чисел. Числа — абстракция, и всё же они составляют основу нашего общества: без них оно не сможет выполнять свои функции. Это один из видов умственных построений, но мы чувствуем, что они не утратят своего значения даже в случае гибели человечества из-за глобальной катастрофы, когда не останется разума, способного их воспринимать.

Запись чисел

История математики начинается с изобретения выражающих числа письменных символов. Привычный нам набор цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, с помощью которого можно представить любое, даже самое огромное, число, изобретен относительно недавно, всего

около 1500 лет назад. А его расширение до десятичных знаков, значительно увеличившее степень точности, и вовсе насчитывает всего 450 лет. Пятьдесят лет назад появились первые компьютеры: они так глубоко внедрили математические расчеты в нашу жизнь, что мы и не замечаем их присутствия. А 20 лет назад началось победное шествие самых мощных и высокоскоростных вычислительных машин, заполонивших офисы и дома.

Без чисел невозможно существование привычной нам цивилизации. Они повсюду, как незримые слуги, неумоимо трудятся за кулисами: передают сообщения, следят за грамотностью напечатанного нами текста, составляют маршрут полета в отпуск, фиксируют покупки, обеспечивают эффективность и безопасность лечения. Есть и противоположная сторона медали: они делают возможным изобретение ядерного оружия, точно наводят на цель бомбы и ракеты. Далеко не всегда математика служит исключительно благим целям.

Как же удалось достичь такого расцвета этой невиданной области? Всё началось 10 тыс. лет назад на Ближнем Востоке с маленьких

глиняных фигурок. Даже тогда счета со- держали сведения о том, кто чем владел и в каком количестве, — хотя еще не было ни письма, ни знаков для чисел. Вместо знаков древние счетчики использовали маленькие глиняные фигурки. Одни имели форму сферы, другие — конуса, третьи — яйца. Были и цилиндры, и диски,

и пирамиды. Археолог Дениз Шмандт-Бессера пришла к выводу, что фигурки представляли основные ценности того времени. Глиняные сферы обозначали меры зерна, цилиндры — животных, яйца — кувшины масла. Самые древние фигурки датируются 8000 г. до н.э., и их широко использовали в последующие 5000 лет.

«Всё началось
10 тыс. лет назад
на Ближнем
Востоке с малень-
ких глиняных
фигурок»

Со временем фигурки становились всё более изысканными и специализированными. Были найдены конусы в виде ломтей хлеба и даже ромбовидные символы пива. Шмандт-Бессера считает, что эти фигурки — не просто приспособления для счета. Это первый, самый важный шаг к изобретению цифровых символов, арифметики и математики. Однако из-за своей необычности он кажется случайным.

Всё произошло потому, что фигурки использовались для записи: возможно, собранных налогов, или финансовых операций, или как законное доказательство права на собственность. Их достоинством была простота, с которой счетчики могли поделить их на группы, чтобы определить, сколько животных или зерна имеет или имел человек. Но был и недостаток: фигурки легко подделывались. Для предотвращения махинаций с ними счетчики стали заворачивать их в своего рода глиняные конверты — аналог печати. Чтобы определить, сколько каких фигурок в каждом конверте, его было достаточно разбить. Восстановить его не составляло особого труда.

Всё же необходимость постоянно раскалывать и восстанавливать конверты казалась чиновникам древней Месопотамии слишком утомительной, и они придумали кое-что получше. Они стали метить конверты особыми символами, обозначающими их содержимое. Если там было семь сфер, то и на конверте они рисовали семь кружков.

Наступил момент, когда до месопотамских чиновников дошло: если есть символы, то можно обойтись и без фигурок; чтобы знать, что внутри конверта, нет нужды его разбивать. В результате этого очевидного, но судьбоносного открытия появился набор письменных символов для чисел, разной формы для разных классов предметов. Все прочие, включая и те, которыми пользуемся мы, — производные от этих бюрократических приспособлений древности. Именно замену фигурок символами можно считать изобретением письменности.

Единицы счета

Первые знаки нельзя считать ранними примерами записи чисел. Это просто царапины, метки, выражающие числа в виде серии насечек, например ||||| для обозначения 13. Самая древняя из известных на сегодняшний день таких надписей — 29 насечек на бедренной кости бабуина, сделанная 37 тыс. лет назад. Эту кость нашли в пещере в горах Лебомбо, на границе между Свазилендом и ЮАР. Место называется Пограничной пещерой, а артефакт — костью Лебомбо.

В отсутствие машины времени нельзя с уверенностью утверждать, что означал каждый символ, но можно делать обоснованные предположения. В лунном месяце 28 дней, значит, насечки, должно быть, связаны с фазами Луны.

В Европе обнаружены похожие артефакты. Пятьдесят семь насечек на волчьей кости из бывшей Чехословакии разбиты на 11 групп по пять с двумя лишними; этой находке 30 тыс. лет. Дважды по 28 будет 56: это может быть обозначение для двухмесячного лунного отрезка времени. И снова у нас нет способа проверить это предположение. Но насечки явно что-то значат, их сделали не просто так.

Еще одна древняя математическая запись, на кости Ишанго из Заира, была сделана 25 тыс. лет назад (прежняя оценка в 6000–9000 лет пересмотрена учеными в 1995 г.). На первый взгляд эти царапины по краям кости кажутся случайными, но здесь может быть скрытый смысл. Один ряд состоит из простых чисел от 10 до 20: это 11, 13, 17 и 19, и в сумме они дают 60. В другом ряду мы видим 9, 11, 19 и 21, что также в сумме равно 60. Третий ряд представляет способ умножения двух чисел: одно из них несколько раз удваивают, а другое делят пополам. Но не исключено, что всё это лишь совпадение или что кость Ишанго — древний лунный календарь.

Первые цифры

Исторический путь от счетных фигурок к современным цифрам долг и извилист. Тысячелетиями народ Месопотамии развивал сельское хозяйство, и на смену кочевому образу жизни пришел оседлый, породив ряд городов-государств: Вавилон, Эриду, Лагаш, Шумер, Ур. Ранние символы на глиняных табличках усложнились до пиктограмм, передающих значения слов в упрощенном виде. Они упрощались всё больше и больше, и в итоге осталось ограниченное число клиновидных отметин, выдавленных на глине сухой палочкой с острым плоским концом. Меняя угол давления, можно было получать отметки разной формы. К 3000 г. до н. э. шумеры создали сложную письменность, названную клиновидной.

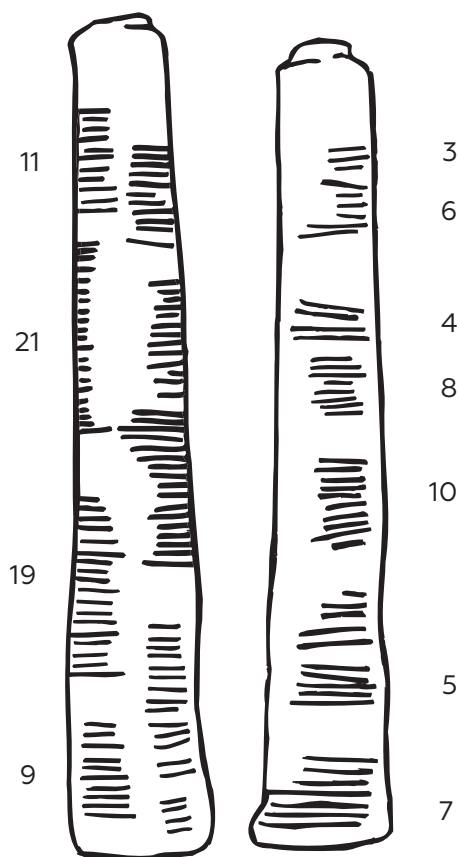
История этого периода чрезвычайно сложна; доминировали то одни города, то другие. В какой-то момент высшего расцвета достиг Вавилон: из месопотамских песков ученые выкопали более миллиона глиняных табличек. Несколько сот из них, посвященных математике и астрономии, демонстрируют удивительно глубокие познания древних в этих областях. В частности, вавилоняне были просвещенными астрономами и сумели создать сложнейшую систему математических символов, с помощью которых могли передавать точные астрономические данные.

Числовые символы вавилонян ушли далеко от простых насечек и считаются самыми древними в своем роде. Использовались два разных вида клинышков: тонкий вертикальный обозначал цифру 1, а толстый горизонтальный — 10. Эти знаки, собранные в группы, представляли числа от 2 до 9 (для вертикальных клиньев) и десятки от 20 до 50 (для горизонтальных). Но ряд кончался на 59, после чего тонкий вертикальный клин уже обозначал число 60.

Таким образом, вавилонская система счисления основана на 60, т. е. является шестидесятиричной. В ней каждый символ обозначает

либо какое-то число, либо его же, умноженное на 60, либо умноженное на 60 и еще раз на 60 — в зависимости от его положения.

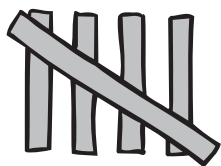
Таков же принцип счисления в нашей десятичной системе, где значение каждого символа умножается на 10, или 100, или 1000 в зависимости от его положения. Например, в числе 777 первая 7 значит «семь сотен», вторая — «семь десятков», а третья — «семь единиц». У вавилонян серия из трех    (символа для 7) будет иметь иное значение, хоть и основанное на том же принципе. Первый символ будет значить $7 \times 60 \times 60$,



Кость
Ишанго:
насечки
и пред-
ставленные
ими числа



20 УКРОЩЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОСТИ



Простые единицы счета удобны тем, что их можно наносить по одной в течение долгого времени, не изменяя и не удаляя предыдущие. Их используют и сейчас, часто в группах по пять: пятая палочка по диагонали пересекает первые четыре



1



2



3

Древние единицы счета можно найти в элементах современных символов. Наши цифры 1, 2 и 3 явно произошли от насечек: одна горизонтальная, две горизонтальные, связанные косой чертой, и три горизонтальные, связанные косыми чертами

т. е. 25 200; второй $7 \times 60 = 420$, третий — 7. Значит, группа из трех символов означает $25\,200 + 420 + 7$, или 25 627. Артефакты с вавилонской системой счисления, основанной на 60, обнаруживаются до сих пор. И 60 секунд в минуте, и 60 минут в часе, и 360 градусов в окружности уходят корнями в Древний Вавилон.

Из-за сложности передачи клинописи ученые изображают вавилонские числа «гибридом» из наших десятиричных знаков и вавилонских шестидесятиричных. Так, тройка клинописных символов для 7 будет выглядеть как 7,7,7. А 23, 11, 14 обозначает вавилонские символы для 23, 11 и 14, написанные по порядку, с числовым значением $(23 \times 60 \times 60) + (11 \times 60) + 14$, или 83 474 в десятичной системе счисления.

Символы для малых чисел

Мы используем десять знаков не только для обозначения сколь угодно больших чисел: эти же символы отлично справляются и с числами сколь угодно малыми. С этой целью мы используем десятичный разделитель, обозначаемый запятой. Цифры слева от нее обозначают целые числа, справа — их доли, дроби. Дробная часть

представляет десятые, сотые доли и т.д. Число 25,47 значит две десятки плюс пять единиц плюс четыре десятых плюс семь сотых.

Вавилоняне знали этот фокус и с пользой применяли его в своих астрономических записях. Ученые использовали в качестве вавилонского эквивалента десятичного разделителя знак «точка с запятой» (;), но это шестидесятеричная «запятая», и числа справа от нее кратны $1/60$, $(1/60 \times 1/60) = 1/3600$ и т.д. Например, последовательность чисел 12,59;57,17 составит

$$12 \times 60 + 59 + \frac{57}{60} + \frac{17}{3600},$$

что в сумме приблизительно равно 779,955.

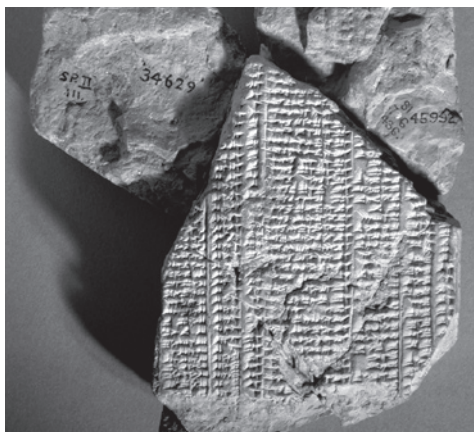
На данный момент известно около 2000 вавилонских астрономических табличек. Большинство из них относительно простые и содержат перечень предсказываемых затмений, других регулярных астрономических событий и краткие данные по ним. Около 300 табличек заслуживают большего интереса и восхищения: на них отмечены пути Меркурия, Марса, Юпитера и Сатурна.

Вавилонские символы для чисел от 1 до 59

1 	11 	21 	31 	41 	51 
2 	12 	22 	32 	42 	52 
3 	13 	23 	33 	43 	53 
4 	14 	24 	34 	44 	54 
5 	15 	25 	35 	45 	55 
6 	16 	26 	36 	46 	56 
7 	17 	27 	37 	47 	57 
8 	18 	28 	38 	48 	58 
9 	19 	29 	39 	49 	59 
10 	20 	30 	40 	50 	

Какой бы увлекательной ни была история Вавилона, нашу всемирную историю она задевает лишь по касательной, в основном в части чистой математики. Однако, судя по всему, именно приложение к астрономии стало важным толчком к более активному развитию этой науки. Вот почему полезно отметить поразительную точность, с которой вавилоняне описывали астрономические события. Например, они определили период обращения Марса (отрезок времени между двумя его появлениями в одной и той же точке на небосклоне) в 12,59;57,17 дня в своем исчислении, т.е. примерно 779,955 нашего дня, как упоминалось выше. Современные данные — 779,936 дня.

ДЛЯ ЧЕГО ЧИСЛА СЛУЖИЛИ ИМ



Вавилонская табличка Юпитера. Вавилоняне использовали свою систему счисления для торговли, счета и более отвлеченных и сложных целей, например астрономии. Здесь способность их системы с высокой точностью представлять дроби оказалась особенно важной. Многие сотни табличек хранят данные о движении планет. Среди них есть одна, относительно плохо со-

хранившаяся, с ежедневными данными о движении Юпитера примерно за 400 лет. Она была создана в самом Вавилоне около 163 г. до н.э. Эта типичная запись содержит числа 126 8 16;6,46,58 –0;0,45,18 –0;0,11,42 +0;0,0,10, что соответствует различным величинам, используемым для вычисления положения планеты в небе. Заметьте: числа с тремя шестидесятеричными знаками после запятой чуть точнее, чем их аналоги из пяти чисел в десятичной системе.

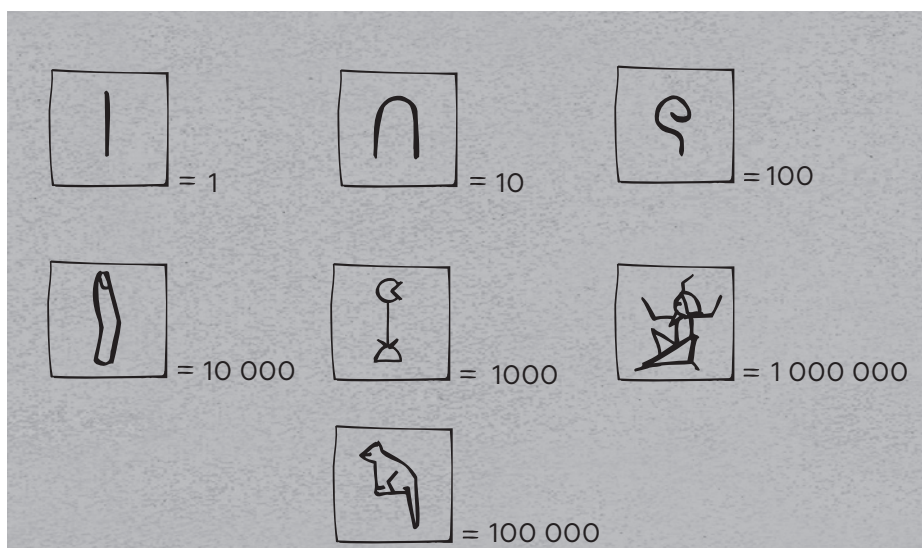
Древние египтяне

Наверное, самой великой из древних цивилизаций была египетская. Период ее расцвета на плодородных берегах Нила и его дельты приходится на 3150–31 г. до н. э., с долгой додинастической историей, простирающейся до 6000 г. до н. э., и медленным упадком под властью Рима после 31 г. до н. э. Египтяне были великими строителями, со сложной высокоразвитой системой верований и церемоний, а также скрупулезными летописцами. Но их математические достижения бледнеют в сравнении с открытиями вавилонян.

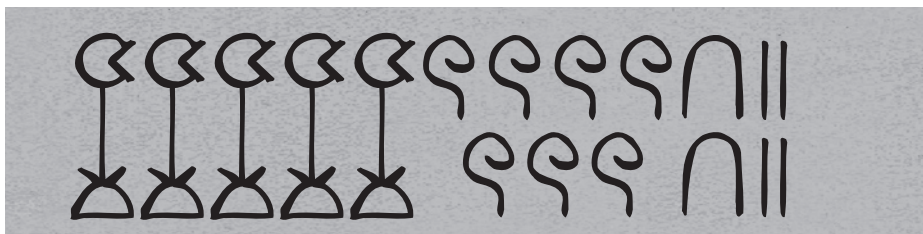
Древнеегипетская система записи целых чисел проста и незамысловата. У них были символы для 1, 10, 100, 1000 и т. д. Повторяя их до девяти раз, они затем складывали их, чтобы получить значение числа.

Например, чтобы изобразить число 5724, египтяне должны были нарисовать рядом пять символов для 1000, семь символов для 100, два символа для 10 и четыре для 1.

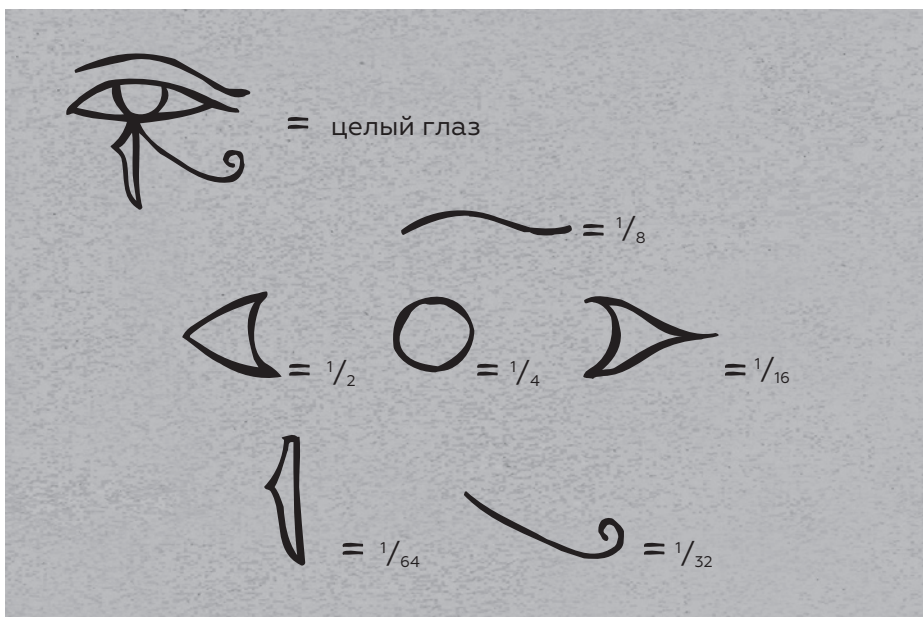
Египетские числовые символы



24 УКРОЩЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОСТИ



Число 5724, записанное египетскими иероглифами



Специальные обозначения некоторых дробей (части «глаза Гора»)



Специальные символы для некоторых дробей

Дроби для египтян были лишней головной болью. В разные периоды они использовали для дробей разные наборы знаков. В Старом царстве (2700–2200 гг. до н.э.) применялись специальные

обозначения для наших дробей: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ и $\frac{1}{64}$, которые получены повторяющимся делением пополам. Эти символы включали части «глаза Гора», или иероглифа Уаджет.

Самую известную древнеегипетскую систему записи дробей относят к Среднему царству (2200–1700 гг. до н.э.). Она начинается с определения каждой дроби в виде $\frac{1}{n}$, где n — положительное целое число. Для обозначения n символ  (иероглиф для буквы R) ставили сверху стандартных египетских символов чисел. Значит, например, $\frac{1}{11}$ будет написана так: . Другие дроби соответственно отображались добавлением необходимого числа таких «единичных дробей». Например, $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Интересно, что при этом египтяне не писали $\frac{2}{5}$ как $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. Судя по всему, здесь работало правило: использовать *разные* единичные дроби. Существовали также разные обозначения для некоторых простых дробей, например $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$.

Египетские обозначения дробей очень неуклюжие и плохо приспособлены для вычислений. Они были пригодны для официальных отчетов, но остались вне поля зрения последующих культур.

Числа и народы

Независимо от вашего отношения к арифметике вы не посмеете отрицать весомое влияние чисел на нашу цивилизацию. Эволюция культуры в целом и математики в частности шли рука об руку на протяжении последних четырех тысячелетий. Сейчас уже практически невозможно отделить причину от следствия: я не рискну уверенно заявить, что именно математические открытия ускоряли глобальные изменения в культуре или, напротив, культурные запросы определяли направление математической мысли. Скорее, оба утверждения содержат зерно истины, ведь математика и культура неразделимы.

ДЛЯ ЧЕГО ЧИСЛА СЛУЖАТ НАМ

Многие современные автомобили оборудованы системой спутниковой навигации. Само устройство относительно дешево. Небольшой прибор, установленный в машине, в любой момент точно определит ваше местоположение и покажет на карте — часто с броской наглядной расцветкой и в трехмерной проекции — ближайшие окрестности и дороги. Голосовое управление объяснит, как лучше всего добраться до нужного места. Звучит как нечто из научной фантастики. Необходимой частью этой системы, не помещенной в вашу коробочку, является GPS (Global Positioning System — Глобальная система определения координат), состоящая из 32 спутников на околоземной орбите. Они постоянно подают сигналы, и с помощью этих знаков навигатор определит положение автомобиля с точностью до метра.

Математика задействована во многих аспектах работы GPS-сети, но здесь мы упомянем один: как используются сигналы спутника для определения локации машины.

Радиосигналы движутся со скоростью света, т.е. примерно 300 тыс. км/с. Компьютер в салоне машины — чип в купленной вами коробочке — может вычислить расстояние от вашей машины до спутника, измерив время, за которое сигнал последнего достигает машины. В среднем это около 0,1 с, но для современной техники не составит труда определить это с большей точностью. Однако нужно так составить сигнал, чтобы он сам содержал информацию о времени.

По сути, спутник и приемник в автомобиле играют одну и ту же мелодию, и мы сравниваем время ее звучания. «Ноты», пришедшие со спутника, будут с небольшой задержкой проигрываться в машине. По аналогии эта мелодия может звучать примерно так:

МАШИНА: ...На этот горный склон крутой / Ступала ль ангела нога?

СПУТНИК: На этот горный склон крутой / Ступала ль...

Здесь «мелодия» спутника проигрывается с задержкой примерно на три слова в самой машине. И спутник, и приемник должны исполнять одну «песню», и исполняемые «ноты» должны быть легко

определяемы, чтобы можно было точно измерить разницу во времени.

Конечно, в спутниковой навигационной системе не звучат песни. Сигнал состоит из коротких импульсов, чья продолжительность определяется псевдослучайным кодом. Это последовательность цифр, случайная на первый взгляд, на самом деле подчиняется определенным математическим правилам. Они известны и спутнику, и приемнику, которые могут генерировать одинаковую последовательность импульсов.

Однако они имеют одно существенное различие. Многие культурные скачки очевидны. Новые веяния в архитектуре, новые виды транспорта, даже новые формы организации правительственной бюрократии так или иначе заметны всем.

Математика обычно скрыта за кулисами. Когда вавилоняне использовали свои астрономические наблюдения для предсказания затмений Солнца, публика впадала в экстаз от точности, с которой жрецы предвидели столь ужасающее событие. Но даже высшее жречество не знало почти ничего о применяемых методах. Они были в курсе, как прочесть таблички с нужными им данными, но для них главным было то, как воспользоваться знанием. Как именно удалось его достичь, оставалось тайной за семью печатями, доступной только специалистам.

Некоторые жрецы получали неплохое математическое образование — как и все культурные переписчики. Они обучались почти так же, как и писцы, особенно в первые годы, но им не требовалось доскональное знание математики, чтобы *пользоваться* преимуществами новых открытий в этой области. Так сложилось исторически, и так всё будет и впредь. Математикам редко вручают награды за кардинальные перемены в нашем мире. Сколько раз вы видели чудеса современного мира, созданные компьютерами, без малейшего намека на то, что они эффективны лишь в том случае, если запрограммированы

на использование сложнейших алгоритмов для решения проблем, и что основой почти любого алгоритма служит математика?

Важный раздел математики, лежащий на поверхности, — арифметика. Но с появлением карманных калькуляторов, способных рассчитывать стоимость покупок или величину налогов, ее от-

«Эволюция культуры в целом и математики в частности шли рука об руку на протяжении последних четырех тысячелетий»

теснили еще дальше. По крайней мере, многие из нас всё еще отдают себе отчет в том, что арифметика есть *где-то там*. Мы живем в полной зависимости от чисел, будь то расчеты доходов и налогов, общение с людьми в другом полушарии, исследование поверхности Марса или испытание нового лекарственного средства. Всё это уходит корнями в Древний Вавилон, к писцам и учителям, изобретавшим

эффективные способы изображать числа и оперировать ими. Они использовали свои познания в арифметике в двух направлениях: в приземленной деятельности простых людей (например, измерение земельных наделов или подсчет налогов) и в возвышенной работе человеческого разума (предсказание солнечных затмений или движения планет в небесной сфере).

Сегодня мы поступаем так же. Мы используем простейшие вычисления, незначительные даже для арифметики, для сотен мелких дел: добавления в нужной концентрации средства от паразитов в пруд с золотыми рыбками, покупки нужного числа рулонов новых обоев для спальни, составления маршрута таким образом, чтобы потратить меньше бензина и сэкономить. А наша культура использует высшую математику в науке, технологиях и всё больше в торговле. Изобретение цифр и арифметического счета наряду с обретением речи и письма занимает законное место среди достижений, которые отличают нас от обучаемых обезьян.

ГЛАВА 2

ЛОГИКА ФОРМЫ

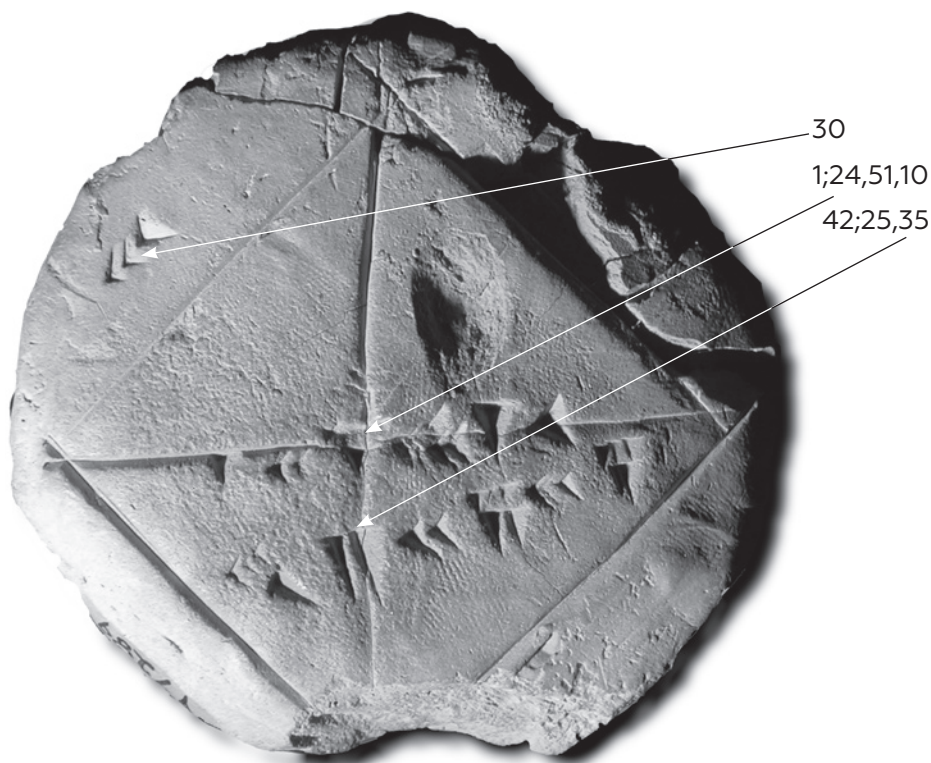
Первые шаги в геометрии

В математике существует два основных типа рассуждений: символьный и наглядный. Символьная выкладка ведет историю от числовой записи, и мы вкратце ознакомились с тем, как это привело к изобретению алгебры, где символы могут обозначать скорее обобщенные числа («неизвестные»), чем какие-то конкретные («7»). Начиная со Средних веков и до наших дней математика всё больше опирается на символы: если хотите убедиться, достаточно взглянуть на любой современный математический текст.

Начала геометрии

Наравне с символами математики используют схемы и диаграммы, открывающие неограниченные возможности для визуализации научных выкладок. Картинки менее формальны, чем символы, и чаще всего именно это ставит под вопрос целесообразность их использования. Широко распространено убеждение, будто картинка дает менее строгую и логичную выкладку, чем подсчеты с помощью символов. Это верно: изображение всегда оставляет больший простор для толкований. Более того, картинка может содержать скрытые намеки. Мы не можем изобразить некий «обобщенный»

треугольник: любой треугольник будет иметь свою форму и размеры, которые порой не соответствуют случайно выбранной фигуре. Но поскольку визуальная интуиция остается очень мощной особенностью нашего мозга, наглядные образы играют важную роль в математике. Фактически они определяют вторую по важности идею предмета после чисел, т. е. его форму.



Табличка YBC 7289 с клинописными числами

Увлечение математиков формами имеет долгую историю. Даже на вавилонских табличках мы находим диаграммы. Например, на табличке с регистрационным номером YBC 7289 есть квадрат с двумя диагоналями. Его стороны отмечены клинописными символами, означающими 30. Выше на одной из диагоналей стоит

1;24,51,10, а под нею 42;25,35, которое равно произведению первого числа на 30, а также длине этой диагонали. Таким образом, 1;24,51,10 — длина диагонали меньшего квадрата со стороной, равной единице. Теорема Пифагора утверждает, что она равна корню квадратному из 2, и мы обозначаем его как $\sqrt{2}$. 1;24,51,10 приближает $\sqrt{2}$ с точностью до шести цифр после запятой.

Первая систематизация с использованием схем, ограниченным применением символов и изрядной долей логики встречается в описании геометрии Евклидом. Он следовал традиции, восходящей к культу Пифагора, чей расцвет пришелся на 500 г. до н. э. Однако Евклид настаивал, что любое положение математики должно иметь логическое доказательство для признания его достоверности. В записях Евклида есть важное нововведение — использование в доказательствах рисунков и логических построений. И многие века слово «геометрия» тесно ассоциировалось с этим подходом.

В этой главе мы проследим историю геометрии от Пифагора через Евклида и его предшественника Евдокса до позднего периода греческого классицизма, вплоть до его «наследников» Архимеда и Аполлония. Эти ранние геометры проложили путь для всех дальнейших работ с наглядными суждениями в математике. Также они установили стандарты логического доказательства, сохранившиеся неизменными на протяжении тысячелетий.

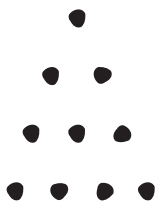
Пифагор

Сегодня мы принимаем как должное то, что математика дает нам ключи к законам существования природы. Первые систематизированные записи об этом пришли к нам от пифагорейцев — приверженцев мистического культа, датируемого промежутком между 600 и 400 гг. до н.э. Его основатель Пифагор родился около

569 г. до н.э. на Самосе. Место и дата его смерти покрыты мраком, но в 460 г. до н.э. основанный им культ подвергся нападкам и искоренению, а тайные места сборищ были уничтожены. В одном из них, доме Мило в Кротоне, более 50 захваченных пифагорейцев вырезали на месте. Многие из выживших сбежали в Фивы в Верхнем Египте. Не исключено, что одним из этих людей был сам Пифагор. Но даже если это всего лишь красивая выдумка, мы практически ничего не знаем о Пифагоре наверняка. Имя его у всех на слуху, главным образом из-за знаменитой теоремы о прямоугольном треугольнике, но мы даже не уверены, доказал ли ее он сам.

Зато нам известно гораздо больше о философии и убеждениях пифагорейцев. Они понимали, что математика — не реальность, а абстрактная концепция. В то же время они верили, что эта абстракция как-то воплощается в «идеальной» концепции, существуя в некоем странном воображаемом мире. То есть, например, нарисованный палочкой на песке круг — безуспешная попытка круга стать идеальным, совершенно ровным и невообразимо тонким.

Самым важным аспектом философии пифагорейцев была идея, что в основе всего лежат числа. Они выражали свою веру с помощью мифологических символов и подкрепляли ее практическими наблюдениями. В мистическом плане они считали, что число 1 — первичный источник всего во Вселенной. Числа 2 и 3 символизируют женское и мужское начала. Число 4 — символ гармонии, а также четырех стихий (земля, воздух, огонь и вода), из которых сотворено всё сущее. Пифагорейцы придавали особое мистическое значение числу 10, потому что $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ и объединяет в себе первичную единицу, женское начало, мужское начало и четыре стихии. Более того, эти числа образуют треугольник, а вся геометрия Древней Греции построена на свойствах треугольников.



Число 10
в виде тре-
угольника