

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 10

Профисловие 20

Акт I

Глава 1. Ex Nihilo 38

Интерлюдия 1. Замедление времени 92

Глава 2. Бесконечные возможности стекла с бесконечным увеличением 110

Интерлюдия 2. Как получить что-то из ничего 159

Глава 3. Словно вызванное из пустоты 166

Интерлюдия 3. Взгляд назад в будущее 211

Акт II

Глава 4. О кругах и методе сдачи 218

Интерлюдия 4. Ностальгическое устройство 259

Глава 5. Эстетика и недвижимый объект 274

Интерлюдия 5. Две тучки 319

Акт III

Глава 6. Два в одном 342

Интерлюдия 6. Убийство диеза 374

Глава N. Новое — это старое 397

*Интерлюдия N. Неправильное истолкование
и новое истолкование* 438

Глава №. Бесконечная красота бесконечного
дикого пространства 445

Главлюдия Ω. In Nihilo 485

Эта книга 493

Словарь 500

Указатель 507

Об авторе 510

Посвящение

Это труднее, чем я ожидал. Посмотрим...

Пусть $J \equiv$ «то, что он всегда был собой».

Пусть $W \equiv$ «то же самое».

Пусть $R \equiv$ «всю помощь. С надеждой, что это в итоге будет иметь смысл».

Итак...

$\frac{\alpha}{2}$ (Эдвину Томпсону Джейнсу, за J)

$\frac{\alpha}{2}$ (Дэвиду Фостеру Уоллесу, за W)

$(1 - \alpha)$ (читателю, за R)

где $\alpha \in [0,1]$ определяется последним из вышеуказанных*.

...(

* Обещаю, что книга не такая мудреная. Здесь и далее примечания автора, если не указано иное.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Хорошая литература должна утешать расстроенных и беспокоить утешенных.*

Дэвид Фостер Уоллес, интервью с Ларри Маккефери

Художественную и научно-популярную литературу не так легко разделить.

Янн Мартел, «Беатриче и Вергилий»

Сожгите кабинет математики

Ладно, не сжигайте кабинет, на самом деле. И ничего другого тоже. Поджог — нехорошо и абсолютно противозаконно. Я... Неважно. Не хочу начинать книгу так.

(Автор ненадолго задумывается.)

Ладно, я думаю... в общем, ясно. Извините.

(Кхе-кхе.)

Все мы должны сильно негодовать. У нас украли кое-что прекрасное, а мы не ощущаем его отсутствия. Ведь кража произошла, когда мы еще не родились. Вообразите, что по какой-то грандиозной исторической причине все мы убеждены, будто музыка — тупое, скучное, нетворческое

* Перифраз слов Сезара Круза: «Искусство должно утешать расстроенных и беспокоить утешенных» (1997). В свою очередь, это вариация высказывания Финли Данна: «Дело газеты — утешать огорченных и огорчать утешенных» (1902). Прим. перев.

занятие, от которого нужно держаться подальше, за исключением самых необходимых случаев. Предположим, все мы в юности учились ей больше десяти лет и из-за неких проявлений яркого садизма со стороны преподавателей окончили этот курс с твердым убеждением, что музыка — не более чем средство для достижения цели. Мы можем согласиться, что каждому следует в общих чертах знать предмет, но только из соображений практичности: музыка вам нужна, поскольку она может — редко — помочь вам *в чем-то другом*. Все были бы убеждены, что музыка больше напоминает работу водопроводчика, а не вид искусства.

Мир был бы по-прежнему полон творческих людей. Так же, как и сейчас. Под творческими личностями я подразумеваю не обязательно учеников школы искусств, или профессиональных художников, или парня, который написал что-то на унитазе и выставил в музее. Я имею в виду людей, которые создают вещи, доставая их из небытия; тех, кто не отказывает себе в праве быть собой; у кого есть свой путь ломки реальности, настолько подлинный, что вы можете ощутить это своими нервными окончаниями; кто входит в мир горящим и слишком часто умирает молодым. «Музыка не для них, — соглашались мы. — Музыка для бухгалтеров среди нас, и лучше всего, если мы оставим ее им». Какой бы надуманной ни казалась ситуация, ровно это произошло с математикой. Ее у нас украли, и сейчас самое время вернуть ее обратно.

В этой книге я защищаю процесс концептуального поджога. Состояние преподавания математики во всем мире упало до уровня, когда уже бессмысленно что-то менять. Нужно все сжечь и начать заново. Приступим прямо сейчас. В этой книге к математике подходят не как к предмету, который был создан и существовал до вас, а теперь его нужно вам объяснить. Начиная с этой страницы ее не существует. Мы сами изобретем ее с основ, без старого багажа мудреных обозначений и напыщенной терминологии, которая бродит по всем учебникам. Традиционные термины будут упоминаться и использоваться, когда в этом есть смысл, но математическая Вселенная, которую мы создаем, наша собственная, и принятые обозначения туда не допускаются, пока мы открыто не пригласим их.

Мы применим подход, который не требует зазубривания, побуждает к экспериментам и неудачам, не просит читателя принять то, чего мы не создали сами, избегает вычурных названий, которые скрывают простоту идей, и представляет математику как приключение (а она такая и есть), в разговорной форме. Книгу легко читать, как будто это роман. Основная цель нашего путешествия — удовольствие, а не практичность, но мы рады констатировать, что между ними нет никакого конфликта. Вы действительно изучите предмет — многое из него, — причем хорошо.

Если пытаться создать изложение математики, которое не требует от читателя принять факты, установленные ранее, невозможно не вспомнить о том, что я считаю фундаментальной трагедией нынешней математической педагогики. И она никогда не упоминается, даже при самой жесткой критике традиционного образования: *мы преподаем предмет задом наперед*.

Расскажу историю, которая покажет, что я имею в виду. У меня была тройка по начальной алгебре. Все, чему я научился, — ненавидеть слово «полиномиальный». У меня была тройка по тригонометрии. Все, чему я научился, — ненавидеть слова «синус», «косинус» и «гипотенуза». Математика была исключительно запоминанием, скукой и деспотичной властью, а уж это-то я люблю меньше всего. К выпускному классу школы я прошел все необходимые курсы. Не могу даже описать, насколько я был счастлив, что теперь можно до конца жизни не заходить в математический кабинет. Наконец-то свободен.

Однажды вечером в последний год учебы я, как обычно, бродил по книжному магазину и увидел книгу по математическому анализу. Я всегда слышал, что он очень труден, но у меня не было курса по анализу и не должно было быть... какое облегчение. Отсутствие обязательства изучать предмет почему-то делало книгу более привлекательной, и я подумал, что стоит полистать ее несколько секунд. Я ожидал увидеть какие-то ужасные символы, подумать: «Ну, это действительно сложно», — а затем поставить книгу на полку и закончить с этим навсегда. Но когда я открыл ее, там не было

обычного мусора. Простым и незамысловатым языком автор говорил примерно так: с прямыми гораздо проще, чем с кривыми, но если вы достаточно увеличите масштаб, то любой маленький кусочек кривой выглядит почти как прямая. Поэтому каждый раз, когда у вас есть задача о кривой, мысленно увеличивайте ее до тех пор, пока она не станет выглядеть как прямая, решите проблему на микроскопическом уровне там, где это просто сделать, а затем вернитесь к первоначальному масштабу. Вы нашли ответ.

Это понятно любому и применимо не только к математике. Если у вас сложная задача, разбейте ее на несколько маленьких, решите их, а потом соберите вместе. Здесь есть изящество и необходимость, чего я никогда не чувствовал на уроках математики. Я еще немного полистал книгу и, когда увидел, что там есть раздел, где автор жалуется на то, как обычно преподают математику, я понял, что у нас с этим парнем много общего.

Я купил книгу и начинал читать ее всякий раз, когда мне было нечего делать. Мне нравилось, как пишет автор. У меня появилось лишнее оправдание тому, что мне никогда не нравилась математика в школе, и в то же время я убеждался, что ошибался по сути. Я не планировал изучать математический анализ и не помнил необходимых предварительных сведений из школы, так что я даже не знал, как решать «простые задачи» на микроскопическом уровне. Но это не проблема: у меня не было ограничений, накладываемых формальным образованием, и некому было наказывать меня, если я что-то делал неверно.

Так началось мое странное путешествие в анализ — до того, как я познакомился с алгеброй, тригонометрией, логарифмом и кучей всего, что вроде бы нужно изучить до анализа. Я купил тетрадь и стал разбираться. Каждый раз, когда я чего-то не понимал, я рисовал картинку и пытался убедить себя, что она правильная. Обычно я терпел фиаско.

Как ни странно, понятия анализа были самыми простыми частями этой книги. Намного труднее оказались так называемые необходимые предварительные области: алгебра, тригонометрия и прочий умозрительный упаковочный пенополистирол, которым набиты современные школьные

курсы. Мысль об увеличении масштаба приобрела для меня смысл: производные и интегралы было не только просто вычислять, но и легко понять исходя из основных принципов. Путь от их «доматематической» мотивировки к определениям и далее к методам вычисления казался логичным и обоснованным, он связывал все воедино. Но изредка приходилось обращаться к тому, что считалось «базой», — и это я не мог понять совсем, хотя и помнил смутно, что слышал от какого-то учителя на тихом скучном уроке. Я не мог додуматься, откуда взялись все эти, казалось бы, простые штуки вроде площади круга или необъясненных «тригонометрических тождеств».

К счастью, меня никто не заставлял запоминать все это, так что я изучал фрагменты анализа, не трогая алгебру и тригонометрию. Я читал что-нибудь в книге, неплохо понимал, а затем терялся, потому что не помнил, как складывать дроби. В случаях вроде этого достаточно было паяться некоторое время на проблемное место, чтобы наконец понять: «О, да они просто дважды умножают на 1. Как будто *лгут*, чтобы сделать задачу проще, а потом *делают поправку на ложь*, чтобы не получить неверный ответ. Интересно...» Другие трюки были не так просты, чтобы их можно было легко раскусить, просто поглядев на них, и они ставили меня в тупик. Логарифмы, синус и косинус, «формула корней квадратного уравнения» и «дополнение до полного квадрата» не входили в мой лексикон, и сами термины ощущались как похмелье от моего отрицательного опыта с математикой в школе.

Немного продвинувшись в анализе, я по-прежнему не разбирался в «предварительных областях», но начал замечать занятное. Я понял, что производная объема сферы равна площади ее поверхности, а производная площади круга — длине окружности. У меня все еще не было идей, откуда взялись сами формулы площади и объема, но таинственная операция «увеличения масштаба» предполагала, что они как-то связаны. Так я впервые столкнулся со странным фактом о математике: мы можем быть в полном тупике по двум разным вопросам и не иметь прогресса по ним в отдельности, но умудриться четко продемонстрировать, что ответ *один и тот же*, даже не зная, каков он. Этот факт, который поначалу выглядит

как черная магия, — фундаментальная особенность абстрактной математики на всех уровнях. Это явно не та тупая авторитарность, которая действовала мне на нервы в школе.

Когда пришло время моего первого года в колледже, я совершил невозможное: решил пройти курс анализа. Я, всегда ненавидевший математику всеми фибрами, из-за случая в книжном магазине ради развлечения взял курс анализа 1. Потом курс анализа 2. Потом мой профессор предложил, чтобы я на второй год взял курс математики уровня выпускника. Я сказал ему, что ничего не знаю и что он сошел с ума. Но я прошел курс и получил высшую оценку. К окончанию колледжа кафедра математики вручила мне одну из тех памятных табличек, на которых пишут что-то вроде: «Поздравляем лучшего студента по математике в нашей истории». Подчеркну: у меня нет врожденного математического таланта и ничто за 13 лет изучения дисциплины до университета не наталкивало на мысль, что я найду удовольствие в этом предмете. В любой системе образования, в которой возможна описанная последовательность событий, что-то идет ужасно неправильно.

В итоге на уроке математике — моем заклятом враге в школе — я чувствовал себя как дома*. После колледжа я собрался поступать в аспирантуру по математической физике в Университете Альберты. Летом после первого курса, следуя своему жизненному принципу заниматься чем угодно, но не тем, что требуется, я увлекся психологией и нейробиологией. В итоге я подал заявление на программы в этой области, чудом оказался принятым, оставил программу по матфизике с магистерской степенью и сейчас живу в Санта-Барбаре, изучаю мозг и поведение с помощью математики. В первый год в магистратуре факультета психологии и наук о мозге я встречал много весьма умных студентов, которые испытывали тот же неоправданный страх перед математикой, что преследовал меня в школе. Каждый раз,

* Мне повезло, что в колледже были изумительные преподаватели, — особенно запомнились Рикки и Викки Клима, Эрик Марланд и Джефф Херст. Встречались и другие чудесные учителя, но эти четверо заслуживают особой благодарности за невероятную отзывчивость и за то, что терпели, когда я врвался к ним в кабинеты с диковинными вопросами, не связанными ни с каким курсом.

когда я вижу испуг в чьих-то глазах при упоминании высшей математики, мне хочется рассказать им, что весь их опыт с этим предметом ложен. Кажущаяся трудность предмета — целиком проблема того, как нам ее преподают, и я сам оценивал себя по этому стандарту. Если в этой книге найдется то, что вы систематически пытались понять, но не смогли, то это *моя* вина, а не ваша. Базовые идеи крайне просты. Абсолютно все. Гарантирую.

В первый мой год в Санта-Барбаре я невольно задумывался, что можно было бы существенно ускорить исследования в любых научных областях, если бы все специалисты этих отраслей лучше знали математику. Я не имею в виду «в их головах было бы больше математических фактов». Речь о том, что они «были бы хорошо обучены абстрактному мышлению». И, что еще хуже, я вполне уверен, что 9 человек из 10 имеют больше «врожденных способностей» к математике, чем я (что бы под этим ни подразумевалось). И я знаю о ней больше, чем мои сокурсники, только благодаря случайному происшествию в книжном магазине, привлекавшему меня к предмету, симпатии к которому я до того времени не ощущал.

Сейчас лето, и я пишу эту книгу для всех, кто когда-нибудь ненавидел математику. Не только для молодых и разочарованных, а для всех ученых, которые втайне относятся к математике как к тошнотворному, но необходимому профессиональному требованию; они добросовестно терпят ее, но никогда не чувствовали огня, анархии и гедонистического удовольствия от предмета. Если я не провалюсь с треском, мы обнаружим много занятного*. Но я должен подчеркнуть, что это не очередная надоедливая попытка «сделать математику веселее», которая обычно означает размазывание тонкого слоя глупых лиц и плохих шуток поверх старого доброго подхода. Это слабенькое улучшение стандартных учебников, и такие книги никогда не преподносят предмет так, как он должен даваться

* Вышеуказанное предложение (разумеется) написано автором этой книги, весьма пристрастным источником, мнению которого по поводу его работы доверять не стоит. Но если применить тот же принцип к предыдущему предложению, мы получим, что следует не доверять самому недоверию. Похоже, мы в тупике. Думайте что хотите.

на мой взгляд: четкие указания на все, что субъективно и необоснованно; что выглядит так, как есть, поскольку кто-то пытался добиться причудливого звучания (осознанно или нет); отделение исторических случайностей от неподвластных времени процессов рассуждений; подтверждение оправданного презрения большинства студентов на уроках математики, где они, по сути, высмеивают способы преподавания предмета; и главное: *задом наперед*. Предмет в том виде, как он обычно представлен в нынешних образовательных учреждениях, не способен вынести ни один творческий самостоятельно мыслящий человек. Книги, которые пытаются исправить этот фундаментальный порок, с названиями вроде «Прикольные функции и их потрясающие графики», упускают большую часть причин, по которым так много учащихся считает предмет чужим*. Но сама математика, если ее очистить от лишнего, претенциозного и представить добросовестно и максимально по-человечески, несомненно, одно из самых красивых открытий нашего биологического вида. Это форма научного искусства, которую не нужно оправдывать тем, что она «полезная», хотя ее изучение — одно из самых плодотворных дел в мире.

В каждый момент нашего путешествия я буду сосредоточиваться на идеях, которые, на мой взгляд, имеют большую концептуальную важность, независимо от того, дают ли их обычно в одном курсе. Мы начнем с самых основ, но со временем приступим к изучению тем, которые преподают на последних курсах четырехлетней математической программы. Если и есть книга, которая ведет от сложения и умножения к анализу в бесконечномерных пространствах, я никогда ее не видел. И я надеюсь показать вам, что такой подход не настолько бредов, как кажется.

На каждой стадии, прежде чем демонстрировать вам какие-то идеи, я стараюсь пропускать их через мысленную центрифугу. Обычно в курсе любого предмета дается путаная смесь важного со случайным, которая скрывает простоту базовых идей даже от самых внимательных учащихся.

* Честно говоря, это название главы из очень хорошо написанной книги. Марк Райан, я был бы рад однажды встретиться лично. Вы невероятный преподаватель.

Я всегда хотел, чтобы преподаватели тратили намного больше времени на разделение этой смеси на составные части до написания учебников и чтения лекций. Я пытался сделать это в своей книге, для примера посмотрите первые несколько страниц главы 4. Также обратите внимание, что круги впервые появляются у нас намного позже того, как мы изобретем анализ. Так и должно быть; до этого они сбивают с толку.

Вот пример, как по-разному мы делаем дело. Одна из немногих штук, которые я помню со школы, — теорема Пифагора. Но я не знаю, почему она верна, не знаю, почему нас это должно волновать, и мне не нравится это вычурное название. Мы избежим всех трех проблем так: я буду использовать термин «кратчайший путь» вместо «гипотенуза», придумаю более описательный термин, чем «теорема Пифагора», предложу самое простое объяснение из тех, что знаю, почему она верна (все займет 30 секунд), и, как только мы изобретем ее для себя, я покажу простой вывод того факта, что время замедляется, когда вы двигаетесь*. Это следует из специальной теории относительности Эйнштейна, но объяснение не требует математических идей сложнее теоремы Пифагора, и вы сможете полностью понять рассуждение. При этом вывод выглядит удивительно. Причем для любого, и неважно, как долго вы всё это уже знаете! Учитывая, что рассуждение понятно, как только мы придумаем формулу для кратчайшего пути (ранее — теорема Пифагора), настоящей трагедией становится тот факт, что его не включают в обязательный школьный курс геометрии. Надо бы звонить в колокола, бросать конфетти и начинать объяснять это вам за пять секунд после изучения теоремы Пифагора. Но почему-то так не делают. А мы сделаем**.

Эта книга нарушает множество соглашений и кучу правил, вероятно, даже слишком много. Ни один метод обучения не подойдет всем сразу,

* Точнее, всякий раз, когда два объекта движутся в разных направлениях или с разными скоростями, их «часы» начинают идти по-разному. Но это не просто факт о часах. Это физическое свойство самого времени. Вселенная безумна. Подробности позже!

** Придется самим поискать колокола и конфетти. Не скажу, что не рад бы вам помочь; но, вероятно, я сейчас не там же, где и вы.

и я точно не претендую ни на то, что эта книга станет *универсальным* лекарством от болезней математического образования, ни на то, что она *гарантированно* подойдет любому. Если ее подход неэффективен для вас, пожалуйста, отложите ее и найдите то, что будет работать. Ваше время ценно, и вам не стоит тратить его на попытки продрасть сквозь книгу, которая вам не по вкусу. Она была написана для души, целиком ради развлечения, а не как часть работы. В идеале ее и читать следует из тех же соображений.

И не важно, вносит ли этот эксперимент свой вклад в вечные ценности или нет. В образовании необходимы радикальные перемены. Пока все выглядит так, будто наши учебные заведения на всех уровнях — от начальной школы до докторантуры и даже стиливых требований академических журналов — призваны вызвать что-то вроде обратного стокгольмского синдрома, заставляя нас ругать то, что мы вполне могли бы любить. Учащиеся, оканчивающие школы и вузы, утомлены самыми умопомрачительными вещами, которые были открыты человечеством. Если они думают, что математика, физика, эволюционная биология, молекулярная биология, нейробиология, информатика, психология, экономика и другие области исследований скучны и неинтересны, это не их вина. Это вина системы образования, которая блестяще подходит для того, чтобы наказывать творческие способности; системы, в которой учат, как правильно писать слова, а не как думать, не одурачивая себя, что мы все неизбежно делаем; системы, в которой уравниваются законы природы и произвольные правила вроде запрета предлогов в конце предложения — как если бы и то и другое было равно обоснованным описанием Метода Устройства Мира; системы, в которой люди обязаны проводить большую часть своей молодости. Для них и для всех вас, у кого был такой опыт, эта книга — мое извинение.

ПРОФИСЛОВИЕ

Предисловие для профессоров. Или профессиональных математиков, или студентов с достаточным математическим багажом для прогулок по этому разделу, или любопытных студентов без математических знаний, или школьных учителей, или кого угодно, кто думает о математике часто... или нет.*

Это не стандартное «Введение». Оно более ознакомительное и при этом более углубленное, чем в большинстве книг, с которыми вы, вероятно, сталкивались. И в таком качестве оно — своего рода эксперимент.

Эксперимент какого рода?

Эту книгу очень легко понять превратно, если кто-то возьмется за нее как за учебник математики, хотя у нее много общего с учебниками и ее можно использовать в таком качестве. Чтобы понять ее цель и структуру, придется ввести новый термин, которого сейчас в нашем лексиконе не хватает: *предматематика*. Под этим я подразумеваю не скучные предметы, вроде «начала алгебры» или «введение в анализ», которыми мы терзаем ничего не подозревающих студентов. Я буду использовать этот термин для всего комплекса идей, смешиваний, вопросов и мотиваций, которые занимают умы создателей математических понятий и заставляют их определять и испытывать строго конкретные виды математических объектов.

Например, определение производной и разных теорем, которые из него следуют, — естественная часть математики, их можно найти в любом учебнике, включающем анализ. Гораздо реже уделяется достаточно внимания *причинам*, *почему* это понятие определено именно так, а не любым из бесконечного множества других возможных способов, а также ходу

* В оригинале неологизм *prefacer*, от *preface* и *professor*. *Прим. перев.*

рассуждений, которые побудили к выбору определения из всех кандидатов (при отсутствии готового учебника математики). Именно к этому комплексу возможностей и рассуждений и относится термин «предматематика». Она включает не только все возможные альтернативные определения математических понятий, которые привели бы в целом к схожим формальным теориям, но также — что, возможно, важнее — все тупики, которые посетил бы этот человек в попытках придумать с нуля стандартные математические определения и теоремы. Это нелегкая работа, которую нужно проделать, чтобы математическое понятие возникло из небытия. Математика — это колбаса; предматематика — объяснение, как та сделана.

Это и есть главная тема книги: редко обсуждаемый процесс движения от размытого и качественного к точному и количественному, или, иными словами, «как изобрести математику для себя». Под «изобретением» я подразумеваю не только создание новых понятий, но и более нужный процесс изучения того, как заново изобретать фрагменты математики, которые уже изобретены другими, чтобы получить более глубокое, «интуитивное» понимание, чем при чтении типового учебника. Это процесс, которому мы почти никогда не обучаем в явном виде, но вынуждаем задумываться о более ценном умении, которое можно вынести из любого курса математики. Изучение того, как (заново) изобрести математику для себя, фундаментально важно и для теоретической, и для прикладной сферы. Сюда входят вопросы вроде «Как математики выяснили, каким методом нужно определять кривую, чтобы можно было говорить о ней в 17 измерениях, где мы не можем ничего нарисовать?» и прикладные типа «Как мне построить модель явления, которое я изучаю, исходя из моих знаний?». Такие вопросы нередко встречаются в учебниках в виде краткого дополнения, но намного необычнее будет поместить их в центр внимания наравне (если не выше) с теоремами и результатами.

Честное описание неформального и путаного процесса создания — отсутствующий кусочек головоломки в нашем взаимодействии с математикой на всех уровнях, от начальной школы до уровня докторов наук, а его

отсутствие — одна из основных причин, почему уроки так скучны даже для самых увлеченных. Элегантность и красоту математики нельзя оценить полностью без глубокого внутреннего понимания предварительного мысленного танца, в котором создаются ее понятия. Этот процесс не так трудно объяснить, как кажется, но он требует радикальных изменений в способе преподавания предмета. Для этого надо включать в учебники и лекции минимум несколько неправильных стартов, ошибок и тупиков, которые должен пережить обычный разум, прежде чем прийти к современным определениям. Нужно писать учебники в виде повествований, в которых герои часто попадают впросак и не знают, что делать дальше. Эта книга — эксцентричная, несовершенная, глубоко личная попытка очертить некоторые, на мой взгляд, базовые концепции и стратегии толкования предматематики: те, которые профессионалы используют каждый день, но редко объясняют в своих учебниках и курсах.

Отсюда следует один важный момент. Хотя правильное акцентирование на предматематике требует радикального изменения способа ее преподавания, не нужно никаких перемен в том, как профессионалы *думают* о математике. Предматематика — их хлеб насущный. Это язык, на котором они мыслят, поскольку они по определению создают — или, если хотите, открывают — предмет. В этом смысле содержание нашей книги не ново. Новизна только в том, что на центральное место выдвигается тонкость, обычно скрытая за стеной формальных доказательств и заранее отполированных выводов (в «неудобных» учебниках) или картинками и почти не объясненными утверждениями (в «удобных» учебниках). Ни в одной точке в диапазоне между легкими ознакомительными книгами, с одной стороны, и внушающими благоговейный ужас монографиями в стиле Гротендика* — с другой, мы не представим точно процесс создания педагогически полезным способом.

* Александр Гротендик (1928–2014) — французский математик, участник группы, которая выступала под псевдонимом Николя Бурбаки. Специалист по алгебраической геометрии, теории чисел и гомологической алгебре. *Прим. перев.*

Невозможно в одной книге исследовать всю предматематику для определенного понятия перед переходом к математике, и я не пытаюсь решить эту невозможную задачу. Скорее я хочу построить повествование, которое ведет от одного понятия к другому, начиная от сложения и умножения, с немедленным переходом к анализу функций одной переменной, а затем назад через темы, которые мы обычно считаем «предварительными областями» (более глубокие!), и в итоге к анализу в многомерных и бесконечномерных пространствах. В этом повествовании очень много математики, и вы не ошибетесь, если будете использовать его как учебник. Но как только для какого-нибудь понятия подробно разработана предматематика, сама математика часто оказывается потрясающе простой. Поэтому мы будем фокусироваться в основном на первой. Это не значит, что книга содержит исчерпывающее и полное обсуждение каждой из тем, которые включены в нее. Вовсе нет! Скорее это моя оценка того, чего не хватает в части информации, мотивации и того, с какого места нам следует начинать преподавать предмет. Эта книга — грубый экспериментальный прототип, а не ограниченный бриллиант. Надеюсь, что она станет началом разговора, а никоим образом не окончательным вердиктом по какой бы то ни было теме.

Кроме того, важно четко понять, что я *не* критикую. Проблема педагогического фундамента принципиально отлична от проблемы фундамента логического, хотя они по смыслу соединены в большинстве учебников. Я не намереваюсь критиковать логическую стартовую точку в данной области, под которой я подразумеваю выбор исчисления предикатов первого порядка для нашей логики; наша теория может использовать аксиоматику Цермело — Френкеля, аксиоматику Бернаиса — Гёделя или вашу любимую аксиоматику теории множеств*. Критиковать я хочу *педагогическую* исходную точку в этой области. Подавляющее большинство членов нашего общества контактировало только с ней.

* Яркую критику стандартного теоретико-множественного подхода к логическим основаниям см. в захватывающей книге Роберта Гольдблатта «Топосы. Категорный анализ логики» (М., 1983). *Прим. перев.*

Почему предматематикой пренебрегают?

Учитывая повсеместную распространенность предматематических рассуждений в умах профессионалов, стоит поинтересоваться, почему они так редко появляются в учебниках и журнальных статьях. Тому множество причин, но мне кажется, что основная — *профессионализм*. Хотя предматематика принципиально важна для понимания нашей области, она систематически исключается из любых дискуссий, которые требуют профессионализма, включая все работы в академических журналах (и не только их). Почему? Потому что *точная* предматематика *не* формальна. Она (по определению) — набор догадок, озарений и проявлений интуиции, ведущих к разработке прежде всего формальной теории. Единственный точный и честный способ дать объяснение неточным мыслительным процессам — показать их с помощью неформальных аргументов на неформальном языке, который точно передает читателю мысль: мы не уверены на сто процентов в том, что наши догадки ведут нас по верному пути, и всегда (хотя бы отчасти) ищем дорогу в потемках. Такой неформальный язык не просто все упрощает до возможности понимания. Это четкий способ описания цепочек рассуждений, с помощью которого создаются новые математические понятия. И без четкого представления о том, как создается математика, представление о предмете будет неполноценным, не таким, каким было бы в ином случае.

Поймите правильно: это и не критика формальных объяснений математики или концепции формального доказательства. В полностью сформированном виде не возникают ни такие доказательства, ни (что важнее) *определения* математических понятий, на которых те основаны. Поверхностное формальное описание неформальных мыслительных процессов сбивает читателя с толку *доказательствами для несуществующих принципов* и тем самым запутывает его, заставляя поверить в то, что его неспособность осознать, как A следует из B , вызвана недостатком знаний, хотя на деле причина в недостаточной точности предматематических рассуждений, лежащих в их основе. Полное раскрытие требует дать неформальные описания того,

что само по себе неформально. Профессионализм действительно важен, но, по существу, его функция заключается в строгой оценке правдивости. И профессионалы нещадно вымарывали чуть ли не всю предматематику.

Какой я видел книгу поначалу

Эта книга выросла из попытки объяснить одно подмножество математической Вселенной максимально честно и незамысловато, обеспечивая на каждом этапе раскрытие секретов нашего ремесла. На каждом шагу я пытаюсь отделить необходимые умозаключения от исторически сложившихся соглашений; я подчеркиваю, что обычно пугающие термины «уравнение» и «формула» — всего лишь код для «предложения»; стараюсь четко дать понять, что символы в математике — всего лишь сокращенные обозначения для вещей, которые мы могли бы назвать словами; пытаюсь вовлечь читателя в процесс изобретения хороших сокращений; всегда стремлюсь прояснить разницу между тем, что другие учебники дают на практике, и тем, как они могли бы это делать. Я стараюсь представить каждый вывод не в стандартной готовой форме, причесанной и ничего не говорящей о мыслительных процессах, приведших к ее появлению, а так, чтобы осветить хоть какие-нибудь тупики, по которым многих из нас можно было бы уговорить пройти, чтобы в конце добраться до ответа. Я стараюсь все объяснить максимально подробно без ущерба для связности повествования; и я поклялся, что скорее сожгу эту книгу, чем позволю себе хотя бы раз сказать: «Запомните это!». Многое мне хотелось бы сделать иначе, но по крайней мере в книге полным-полно всего упомянутого выше.

Я также пытаюсь объяснить странные танцы, которые исполняет наша область на границе между структурированной необходимостью и необузданной анархией. Это то, что мы практически никогда не объясняем учащимся, и я это подчеркиваю, когда только возможно. Вот что я имею в виду. С одной стороны, это анархия. Мы вольны использовать любые аксиомы, которые захотим, даже противоречивое их множество.

Определять противоречивую формальную систему и экспериментировать с ней — не *незаконно*, а просто *скучно*. Например, «деление на ноль» не *незаконно*, и каждый преподаватель математики это знает. Мы запросто можем определить символ $\star$ свойством $\star \equiv \frac{a}{0}$ для всех a , и во многих книгах по анализу так и поступают: в разделе о том, что обычно зовется «расширенной системой вещественных чисел»*. Но если вы будете настаивать на определении вышеприведенного символа, то алгебраическая структура, которую вы изучаете, не может быть полем. Вы настаиваете, что она — по-прежнему поле? Прекрасно, но тогда вы можете говорить лишь о «поле с одним элементом». Вы утверждаете, что элементов больше одного или поля по вашему определению имеют минимум два элемента? Тоже прекрасно, но тогда вы работаете в противоречивой формальной системе. Вы этого хотите? Прекрасно. Но тогда любое предложение доказуемо, и ничего с этим не поделаешь.

Важно подчеркнуть, что даже теперь, сев на мель, мы не сделали ничего *незаконного*. Скорее обсуждение стало *скучным*. Каждый математик знает, что по крайней мере при выборе объекта изучения в математике законов нет. Есть лишь более или менее элегантные и интересные структуры. Кому решать, что считать элегантным и интересным? Нам. Что и требовалось доказать.

Есть и структурированная часть математики. Как только мы завершим этап «все можно», на котором говорим, что именно представляют собой наши допущения и о чем вообще речь, *тогда* мы обнаружим, что сотворили мир независимой от нас истины, о котором мы знаем очень мало и который должны исследовать.

Что и говорить, когда мы не сообщаем учащимся это фундаментальное положение об анархии и структуре, мы дезинформируем их о сути математики. Почему-то мы почти никогда не говорим им об этом странном

* Обычно пишут ∞ вместо $\star$. Я использую $\star$, чтобы напомнить о том, что рассуждение — не проблема «бесконечности», а проблема скуки, которая корезит математическую Вселенную, когда мы предполагаем, что нулевой элемент по сложению имеет обратный по умножению.

взаимодействии между анархичным творением и структурированным умозаключением. Я убежден, что из-за подобного подхода (в частности) очень многие думают, будто математика — что-то вроде пустоши под властью тоталитаризма, где полным-полно неопределенных законов, о которых никто вам не расскажет, и где вам всегда надо опасаться случайно сделать что-то неправильно. Именно так я всегда чувствовал себя в школе, до событий, о которых я рассказал в первом предисловии. Именно это одна из тех проблем, которые я пытаюсь устранить в своей книге.

Книга тоже решает, о чем она будет

Поскольку я хотел разъяснить общие моменты, например комплексное представление о структуре математики, то собирался подойти и к объяснению концепций, которые преподаются в стандартных учебниках. Так что эта книга действительно может оказаться полезной во всем мире. Для этого мне надо было построить рассказ так, чтобы подвести ко множеству стандартных определений из учебников, прежде чем объяснить математические выводы из них. Но, с учетом заявленной цели, я пообещал себе, что не буду вводить эти термины стандартным путем: «это и это определяем так-то и так-то», часто из ниоткуда, в лучшем случае — с несколькими страницами изложения мотивов, концептуальных или исторических, за которыми идет длинный скачок к формулировке. Отказавшись от этого, я обнаружил, что попал в довольно тесные рамки. Проблему можно кратко изложить так.

Предположим, вы не знаете ничего о математике, за исключением основ сложения или умножения. Речь не обязательно об алгоритмах их выполнения, но вы в курсе, что означают фразы вроде «вдвое больше», и осознаёте суть обеих операций. Вы живете в мире, где учебников пока нет. Как бы вы смогли открыть даже самые простые разделы математики? Конкретнее: как бы вы выясняли, что площадь прямоугольника равна «длине, умноженной на ширину»?

Было бы нелогично отвечать на этот вопрос, рассуждая, как площадь определяется в теории меры, либо говоря об аксиомах, или пятом постулате Евклида, или о том, как формула $A = lw$ не работает в неевклидовой геометрии. Это не вопрос строгости или истории. Это вопрос *создания*. Наша задача — двигаться от неясного, качественного, обиходного понятия к точному, количественному, математическому, когда вокруг никого, кто мог бы помочь или сделать вместо вас.

Вышеприведенный вопрос мне когда-то задала Эрин Горовиц. К тому времени, когда я начал писать эту книгу, у нас случались многочасовые беседы о математике. У нее нет нужной подготовки, но она крайне любопытна и всегда интересуется разными вопросами. Мы говорили о формальных языках, ряде Тейлора, понятии пространства функций и прочих безумных вещах, о которых обожаем болтать. Однажды она спросила меня, как рождаются математические идеи. В такой формулировке, с использованием площади прямоугольника в качестве примера, вопрос был несложным, и я предложил ей самый короткий вариант, который смог придумать: рассуждение о площади, которое вы найдете в главе 1. Когда я закончил говорить, она спросила, почему нас никогда не учат подобному в школе. Она уяснила это короткое рассуждение, как смог бы любой на ее месте. И вот самое странное: оно включает функциональное уравнение.

На математических кафедрах очень мало курсов, которые сосредоточены на функциональных уравнениях. Я не уверен, что их должно быть больше, но сам факт приводит в замешательство, как только его осознаешь. В конце концов, все студенты-математики, как им и положено, сталкиваются со множеством дифференциальных уравнений и неизбежно встречаются с интегральными уравнениями. Но областью математики, посвященной изучению и решению общих выражений, которая включает неизвестные функции, история в основном пренебрегала. И хотя это одна из самых старых тем в математике, нам нечасто доводится о ней слышать. В своем монументальном труде «Лекции по функциональным уравнениям

и их применению» Янош Ацель* сетует, что «долгие годы не существовало систематического освещения этой области, несмотря на ее солидный возраст и практическую важность».

К своему удивлению, я начал открывать для себя, что функциональные уравнения чрезвычайно полезны для объяснения даже самых простых математических концепций, если правильно преподносить их**. Вот как это надо делать. Вы не используете термин «функциональное уравнение» и по возможности даже слово «функция». У большинства людей есть печальный опыт изучения математики в школе, их легко напугать и подавить природную изобретательность, используя нагромождения общепринятых математических терминов. Вместо этого вы рассказываете примерно так.

У нас есть неясное обиходное понятие, которое мы хотим превратить в точное математическое. Здесь нельзя ошибиться, ведь мы сами будем решать, насколько успешно превращение. Но мы хотим втиснуть как можно больший объем обиходного понятия в математическое. Начинаем с нескольких фраз о нашем обиходном понятии. Затем придумываем сокращения для них***. Затем мысленно выкидываем все варианты, которые не обеспечивают необходимого. Теперь можем всё прополоскать и повторить еще раз (если захочется), переводя всё больше и больше неясной повседневной информации в сокращенную форму, а потом мысленно отбрасывая то, что ведет себя не как надо. Иногда, записывая примеры, мы понемногу начинаем убеждаться в том, что точное определение, которое мы ищем, должно выглядеть определенным образом. Не исключено, что мы не сведем всё к одной возможности, и даже если так произойдет, мы не узнаем, когда обнаружили эту

* Aczel J. Lectures on Functional Equations and Their Applications. Dover Publications, 2006.

** Функциональные уравнения не в полной общности, как в монографии Акцеля, а в неформальной версии, аналогичной областям, которые мы преподаем до анализа.

*** В это время функциональное уравнение записывается без его осознания.

возможность, но это неважно. Если нашлось более одного кандидата-определения и все они ведут себя так, как нам хочется, мы можем поступить так, как всегда поступают математики, хотя ничего вам не говорят: выбираем то, что кажется нам симпатичнее всего. Что такое «симпатичнее всего»? Вам решать.

Как бы безумно это ни звучало, я уверен, что неформальные математические рассуждения, включающие функциональные уравнения, позволяют лучше объяснить, откуда берутся наши определения на всех уровнях математики. Они же обеспечивают что-то вроде антиавторитарного педагогического стиля, который вовлекает читателя в процесс создания математических понятий способом, не описанным во вводных курсах и учебниках. На удивление часто (хотя, разумеется, и не всегда) оказывается, что редко обсуждаемая предматематическая практика превращения неясного качественного понятия в количественное включает использование функциональных уравнений. В главе 1 мы используем эту идею для «изобретения» понятий площади и крутизны (углового коэффициента), не приходя к общепринятым определениям путем простого их постулирования, а выводя их из сопоставления с обиходными представлениями. Это иллюстрация того, как может выглядеть предматематическая педагогика, но это лишь пример, оставляющий достаточно простора для совершенствования. В тексте книги мы будем «изобретать» множество математических понятий, иногда с помощью неформального использования функциональных уравнений, иногда иначе, но всегда четко давая понять, что именно мы пытаемся сделать и какие другие варианты существуют.

Как это поможет

Чтобы увидеть, как акцент на предматематике отличается от стандартного подхода, рассмотрим конкретный пример того, как традиционное преподавание загоняет себя в угол. Изучим задачу, которая встает перед

преподавателем или учебником, когда надо объяснить, откуда берется определение углового коэффициента. С одной стороны, вам хочется обогатить идею. С другой — вы хотите прийти к стандартному определению $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, или, как говорят в учебниках, к «отношению приращения функции к приращению аргумента». Все дифференциальное исчисление основано на этой формуле в сочетании с понятием предела, и едва ли найдется более важное понятие, которое нужно передать ученикам. Преподаватели и авторы учебников сталкиваются с такой проблемой. Они способны придумать набор постулатов, который выделил бы «отношение приращения функции к приращению аргумента» как уникальное определение, удовлетворяющее всем этим утверждениям, но доказательство выходит слишком сложным для ознакомительного курса и, очевидно, приведет любого читателя в гораздо большее замешательство. Поэтому они вводят «отношение приращения функции к приращению аргумента» как *определение* углового коэффициента, возможно, добавляя предварительное обоснование. С учетом ситуации эта мера кажется вполне разумной.

Но я уверен, что в данном случае (и других подобных) мы сбиваем с толку очень многих и отвращаем их от математики. Когда я впервые услышал определение углового коэффициента в школе, это только поспособствовало утрате мотивации. Введение понятия таким образом: а) оставляет множество неотвеченных вопросов; б) заставляет каждого вдумчивого учащегося чувствовать себя так, словно он что-то упустил; в) неявно предполагает, что ученик не понимает сути по своей вине. Разумеется, он что-то упустил, но *не* по своей вине, а поскольку преподаватели «что-то» от него намеренно скрыли, причем из лучших побуждений. Лично мои ощущения можно было описать примерно так: «Я бы не смог изобрести ни одного из этих определений самостоятельно, используя основные принципы, поэтому что-то я во всем этом не понимаю». В то время я, конечно, не облекал свои ощущения в такие слова. На ум приходила отчетливая мысль: «Я эту штуку не понимаю».

Годы спустя, когда я стал объяснять математику другим, я всегда старался обратить внимание на то, что мы *могли бы* определить угловой коэффициент как «три отношения приращения функции к приращению аргумента», «отношение приращения функции к приращению аргумента в пятой степени» или даже «отношение приращения аргумента к приращению функции», после чего развивать анализ на основе любого из этих определений. Наши формулы выглядели бы немного иначе (или заметно иначе, в зависимости от выбранного определения), и мы могли бы сформулировать некоторые знакомые теоремы в слегка иной или даже неузнаваемой форме, но суть теории осталась бы прежней, какой бы чуждой и отталкивающей она ни казалась. То же верно для любого математического понятия. И при объяснении этого кому-либо крайне редко меня не спрашивали, почему об этом не говорится в курсах и учебниках. Я не знаю. Должно говориться.

Математика в огне: рассказ о математическом творении

Что я, по-вашему, должен публиковать? Леонард Сэвидж (1962) задал этот вопрос, чтобы выразить легкое недоумение тем фактом, что, какую бы тему он ни взял для обсуждения, какой бы стиль изложения ни выбрал, он был уверен, что его будут критиковать за такой выбор. В этом он не одинок. Мы хотим попросить относиться чуть более терпимо к нашим индивидуальным различиям.*

Эдвин Томпсон Джейнс, «Теория вероятностей. Логика науки»**

Сочинение книги — эмоциональный опыт. В ходе подготовки к публикации мне повезло заполучить двух чудесных редакторов: Томаса Келлехера

* Леонард Джимми Сэвидж (1917–1971) — американский математик и статистик. Прим. перев.

** Jaynes E. T. Probability Theory: The Logic of Science. Cambridge University Press, 2003.

и Куинь До, которые все это время оказывали мне неоценимую помощь. Я имел дело в основном с Куинь. Она проявляла нескончаемое терпение, помогая мне шлифовать очень сложную для редактирования (могу только вообразить, насколько) книгу, и, хотя мы не всегда сходились во мнении, ее комментарии *чрезвычайно* улучшили результат. После упоминания редакторов обычно говорят: «В книге остались только мои огрехи», но эта традиционная фраза слишком слабо отражает истинное положение вещей.

Даже в заключительном варианте книга неизбежно имеет недостатки: опечатки, преувеличения, плохо сформулированные предложения, повторы, противоречия себе, излишне самонадеянные и рискованные высказывания, заявления типа «Я никогда не сделаю X!», после чего сразу следует X; заявления «Я никогда не сделаю X!», после чего позже (но не сразу) следует X; неожиданные шуточки, которых никто не найдет и не поймет; ненамеренное отвращение от себя или даже оскорбление ни в чем не повинных читателей; эксперименты со средствами выражения способами, которые многие сочтут слишком отвлеченными; слишком много предисловий, отступлений, диалогов; слишком мало диалогов; слишком много метакомментариев; использование заумных греческих и латинских слов (пусть и для того, чтобы посмеяться над ними, а заодно теми, кто ими пользуется) для большей вычурности, чем необходимо; и минимум одна непростительно крупная ошибка, которая, вероятнее всего, появилась при нечаянном копировании случайного абзаца в совершенно другую часть книги... и так до бесконечности.

Это моя первая книга. Я строил ее на лесах своих недостатков. Я никогда не думал, что займусь этим, и был крайне изумлен, когда это случилось. Я написал ее за четыре месяца в 2012 году, в эйфорическом возбуждении от кофе, утомляя глаза по 16 часов в день, забывая поесть и наслаждаясь каждой минутой. Мне никогда еще не было писать так весело. На тот момент мне было 25. С тех пор, кажется, я стал другим человеком. Теперь,

когда перечитываешь некоторые части, скребет на душе. Когда книга создается так, как описано выше, в ней неизбежно оказываются разные недостатки, которые не изжить никаким редактированием и никакой шлифовкой.

В большинстве своем эти недостатки случайны, но некоторые заложены намеренно. Если ошибка — просто оплошность, то ее устранение не повредит делу. Когда мы убираем опечатку в предложении N , то на предложение $N + 1$ это не влияет. Тот же принцип применяется для неяршливых формулировок или ненужных повторов, и (хотя многие такие оплошности, безусловно, остаются в книге) это такие ошибки, которые стоит устранить.

Но порой ошибка — не просто оплошность, а в каком-то смысле ступенька. Это то, без чего мы бы никогда не добрались до нужного места. Если убрать из лестницы N -ю ступеньку, это повредит следующим, независимо от того, что собой представляет наша лестница: повествование или математическое рассуждение. Некоторым идеям нужны недостатки, чтобы можно было их правильно донести. Моя цель — завлечь читателя секретами процесса творения как математики, так и книг, но нельзя вообразить безукоризненный процесс творения. Если и есть тема, которая связывает вместе все выкрутасы в этой книге, то это *полное раскрытие*. Это открытость и честность — не только в отношении процесса математического творчества, но и по поводу написания книги, а также эмоционального опыта возвращения к написанному после долгого отсутствия и понимания того, что некоторые недостатки слишком глубоко укоренились, чтобы их выкорчевать. Мысли о людях, которые уделили часть своей жизни прочтению этой книги, делают меня таким счастливым, что нет желания что-либо прятать от них. Я хочу показать им все. Вообще все. И это неизбежно приводит к появлению необычной книги.

Надеюсь убедить вас далее, что причина, по которой так много членов нашего общества никогда не полюбят и не поймут математику,

в том, что мы неверно общаемся на математические темы. *Это не значит, что я знаю, как это надо правильно делать!* Моя книга может оказаться грандиозным фиаско, но в одном я точно уверен: математика заслуживает лучшего, чем те методы, которые мы сейчас используем для ее преподавания на всех уровнях. Эта книга — моя личная попытка исправить некоторые из таких огрехов; я написал книгу, которую сам всегда хотел прочесть. Готовы немного позабавиться? Я тоже. Поехали.

