

СОДЕРЖАНИЕ

1. Пролог**	15
ЗАМЕЧАНИЕ О ТЕРМИНАХ	17
БЛАГОДАРНОСТИ	17
2. ГЛОССАРИЙ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ	19
2.1. ОБЩИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ЧАСТО ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ СИМВОЛЫ	19
2.2. Систематический каталог общих и идиосинкразических понятий	22
2.2.1. Класс степенного закона \mathfrak{F}	22
2.2.2. Закон больших чисел (слабый)	23
2.2.3. Центральная предельная теорема (ЦПТ)	23
2.2.4. Закон средних чисел, или Предасимптотика	24
2.2.5. Показатель каппа	24
2.2.6. Эллиптическое распределение	25
2.2.7. Статистическая независимость	25
2.2.8. Устойчивое распределение (устойчивое по Леви)	25
2.2.9. Многомерное устойчивое распределение	26
2.2.10. Точка Караматы	26
2.2.11. Субэкспоненциальность	26
2.2.12. t -распределение Стьюдента как прокси	27
2.2.13. Круг цитирования	27
2.2.14. Погоня за рентой в научном мире	28
2.2.15. Псевдоэмпиризм, или Проблема Пинкера	28
2.2.16. Предасимптотика	29
2.2.17. Стохастизация	29
2.2.18. Стоимость под риском, условная стоимость под риском	30
2.2.19. Своя шкура на кону	30
2.2.20. График MS	31
2.2.21. Максимальный аттрактор (MDA)	31
2.2.22. Подмена интеграла в литературе для психологов	31
2.2.23. Попытка вынести вероятность за скобку (еще одна типичная ошибка)	32
2.2.24. Линейка Витгенштейна	32
2.2.25. Черные лебеди	32
2.2.26. Выборочная функция распределения ненаблюдаема эмпирически	33
2.2.27. Скрытый хвост	34
2.2.28. Теневой момент	35
2.2.29. Зависимость в хвосте	35
2.2.30. Метавероятность	35
2.2.31. Динамическое хеджирование	35

Часть I. ЖИРНЫЕ ХВОСТЫ И ИХ ПОСЛЕДСТВИЯ, ЗНАКОМСТВО

3. НЕТЕХНИЧЕСКИЙ ОБЗОР — ЛЕКЦИЯ В КОЛЛЕДЖЕ ДАРВИНА*†	39
3.1. О РАЗЛИЧИИ МЕЖДУ ТОНКИМ И ЖИРНЫМ ХВОСТОМ	39
3.2. ХВОСТ, ВЛИЯЮЩИЙ СОБАКАМИ: ИНТУИТИВНО	44
3.3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ КАТЕГОРИИ И ЧТО ИЗ НИХ СЛЕДУЕТ	44
3.4. ОСНОВНЫЕ СЛЕДСТВИЯ И КАК ОНИ СВЯЗАНЫ С ДАННОЙ КНИГОЙ	49
3.4.1. Прогнозирование	60
3.4.2. Закон больших чисел	61
3.5. ЭПИСТЕМОЛОГИЯ И ДЕДУКТИВНАЯ АСИММЕТРИЯ	64
3.6. НАИВНЫЙ ЭМПИРИЗМ: НЕ НАДО СРАВНИВАТЬ ЭБОЛУ И ПАДЕНИЯ СО СТРЕМЯНОК	69
3.6.1. Как изменяется масштаб некоторых мультипликативных рисков	73
3.7. АЗБУКА СТЕПЕННЫХ ЗАКОНОВ (ПОЧТИ БЕЗ МАТЕМАТИКИ)	74
3.8. ГДЕ ПРЯЧУТСЯ СКРЫТЫЕ СВОЙСТВА?	77
3.9. БАЙЕСА-ШМАЙЕСА	81
3.10. X И $F(X)$: КАК ПУТАЮТ ВОЗДЕЙСТВИЕ ВЕЛИЧИНЫ X С САМОЙ ВЕЛИЧИНОЙ X	82
3.11. РАЗОРЕНИЕ И ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПУТИ	86
3.12. ЧТО ДЕЛАТЬ?	89
4. ОДНОМЕРНЫЕ ЖИРНЫЕ ХВОСТЫ УРОВНЯ 1, С КОНЕЧНЫМИ МОМЕНТАМИ†	91
4.1. ПРОСТАЯ ЭВРИСТИКА, КАК СОЗДАВАТЬ СЛЕГКА ЖИРНЫЕ ХВОСТЫ	91
4.1.1. Эвристика, сохраняющая дисперсию	94
4.1.2. Ужирнение хвостов при помощи асимметричной дисперсии	95
4.2. СПОСОБНА ЛИ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ВОЛАТИЛЬНОСТЬ ГЕНЕРИРОВАТЬ СТЕПЕННЫЕ ЗАКОНЫ?	98
4.3. ТУЛОВИЩЕ, ПЛЕЧИ И ХВОСТЫ	99
4.3.1. Точки перехода и туннельный эффект	99
4.4. ЖИРНЫЕ ХВОСТЫ, СРЕДНЕЕ ОТКЛОНЕНИЕ И ПОВЫШАЮЩИЕСЯ НОРМЫ	103
4.4.1. Обычные ошибки	103
4.4.2. Немного аналитики	105
4.4.3. Влияние жирных хвостов на «эффективность» STD против MAD	108
4.4.4. Моменты и неравенство о средних разной степени	109
4.4.5. Комментарий: почему среднеквадратическое отклонение нужно отправить в отставку, и немедленно!	112
4.5. ВИЗУАЛИЗИРУЕМ, КАК РОСТ p ВЛИЯЕТ НА ИЗО-НОРМЫ	115
5. УРОВЕНЬ 2: СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ ЗАКОНЫ	118
5.0.1. Вернемся к ранжированию	118
5.0.2. Что такое пограничное распределение вероятностей?	120
5.0.3. Давайте выдумаем распределение	121
5.1. УРОВЕНЬ 3: МАСШТАБИРУЕМОСТЬ И СТЕПЕННЫЕ ЗАКОНЫ	123
5.1.1. Масштабируемое и немасштабируемое — более глубокий взгляд на жирные хвосты	123
5.1.2. Серые лебеди	126
5.2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ ЗАКОНОВ	126
5.2.1. Сумма случайных величин	126
5.2.2. Преобразования	127
5.3. КОЛОКОЛООБРАЗНЫЕ И ДРУГИЕ СТЕПЕННЫЕ ЗАКОНЫ	128
5.4. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ СТЕПЕННЫХ ЗАКОНОВ: ПРИМЕР	129
5.5. СВЕРХЖИРНЫЕ ХВОСТЫ: РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГ-ПАРЕТО	130
5.6. ПСЕВДОСТОХАСТИЧЕСКАЯ ВОЛАТИЛЬНОСТЬ: РАССЛЕДОВАНИЕ	131

6. ЖИРНЫЕ ХВОСТЫ В ВЫСШИХ РАЗМЕРНОСТЯХ [†]	134
6.1. ТОЛСТЫЕ ХВОСТЫ ПРИ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ, КОНЕЧНЫЕ МОМЕНТЫ.....	134
6.2. СОВМЕСТНАЯ ЖИРНОХВОСТОСТЬ И ЭЛЛИПТИЧНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ.....	135
6.3. МНОГОМЕРНОЕ t-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА.....	140
6.3.1. Эллиптичность и независимость при толстых хвостах.....	140
6.4. ЖИРНЫЕ ХВОСТЫ И ВЗАИМНАЯ ИНФОРМАЦИЯ.....	141
6.5. ЖИРНЫЕ ХВОСТЫ И СЛУЧАЙНЫЕ МАТРИЦЫ, КРАТКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ.....	142
6.6. КОРРЕЛЯЦИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ.....	143
6.7. ЖИРНОХВОСТЫЕ ОСТАТКИ В МОДЕЛЯХ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ.....	144
A. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ТОЛСТЫХ ХВОСТОВ.....	149
A.1. МУЛЬТИМОДАЛЬНОСТЬ И ЖИРНЫЕ ХВОСТЫ, ИЛИ МОДЕЛЬ ВОЙНЫ И МИРА.....	149
A.2. ПЕРЕХОДНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ: ЧТО МОЖЕТ РАЗБИТЬСЯ, РАЗОБЬЕТСЯ.....	152

Часть II. ЗАКОН СРЕДНИХ ЧИСЕЛ

7. ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, КОНСОЛИДАЦИЯ ^{††}	157
7.1. НАПОМИНАНИЕ: СЛАБЫЙ И СИЛЬНЫЙ ЗБЧ.....	157
7.2. ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ В ДЕЙСТВИИ.....	159
7.2.1. Устойчивое распределение.....	160
7.2.2. Закон больших чисел для устойчивого распределения.....	160
7.3. СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ЦПТ: НАГЛЯДНЫЕ ОПЫТЫ.....	161
7.3.1. Быстрая сходимость: равномерное распределение.....	161
7.3.2. Полузамедленная сходимость: экспоненциальные распределения.....	162
7.3.3. Медленный Парето.....	163
7.3.4. Полукубический Парето и его область сходимости.....	165
7.4. КУМУЛЯНТЫ И СХОДИМОСТЬ.....	166
7.5. ПОВТОРИМ ТЕХНИКУ: ТРАДИЦИОННЫЕ ВЕРСИИ ЦПТ.....	169
7.6. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ВЫСШИХ МОМЕНТОВ.....	170
7.6.1. Высшие моменты.....	170
7.7. СРЕДНЕЕ ОТКЛОНЕНИЕ ДЛЯ УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ.....	173
8. СКОЛЬКО НУЖНО ДАННЫХ? РАБОЧИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ ЖИРНОХВОСТОСТИ [†]	175
8.1. ВВЕДЕНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.....	176
8.2. ПОКАЗАТЕЛЬ КАППА.....	178
8.3. УСТОЙЧИВЫЙ БАССЕЙН СХОДИМОСТИ КАК ТОЧКА ОТСЧЕТА.....	179
8.3.1. Эквиваленты устойчивых распределений.....	180
8.3.2. Практическая значимость при достаточной выборке.....	182
8.4. ТЕХНИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ.....	184
8.4.1. Некоторые странности асимметричных распределений.....	184
8.4.2. Скорость сходимости t-распределения Стьюдента к гауссову бассейну.....	184
8.4.3. Логнормальный хвост — ни тонкий, ни жирный.....	185
8.4.4. Возможна ли отрицательная каппа?.....	185
8.5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И СЛЕДСТВИЯ.....	185
8.5.1. Портфельная псевдостабильзация.....	186
8.5.2. Другие аспекты статистических выводов.....	187
8.5.3. Последний комментарий.....	187
8.6. ПРИЛОЖЕНИЕ, ВЫВОД ФОРМУЛ, ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.....	187
8.6.1. Кубическое t-распределение Стьюдента (гауссов бассейн).....	187
8.6.2. Логнормальные суммы.....	190
8.6.3. Экспоненциальное распределение.....	193
8.6.4. Отрицательная каппа, отрицательный эксцесс.....	193

9. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СКРЫТЫЕ ХВОСТЫ*†	195
9.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ВСТУПЛЕНИЕ К ТЭЗ	197
9.1.1. Любой хвост степенного закона ведет к Фреше	198
9.1.2. Гауссов случай	200
9.1.3. Теорема Пикэндса — Балкемы — де Гаана	202
9.2. НЕВИДИМЫЙ ХВОСТ ПРИ СТЕПЕННОМ ЗАКОНЕ	202
9.2.1. Сравнение с нормальным распределением	205
9.3. ПРИЛОЖЕНИЕ: ЭМПИРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕ ЭМПИРИЧНО	205
В. СКОРОСТЬ РОСТА И РЕЗУЛЬТАТ ПРИНАДЛЕЖАТ РАЗНЫМ КЛАССАМ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ	207
В.1. ЗАГАДКА	207
В.2. У ПАНДЕМИЙ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО ЖИРНЫЕ ХВОСТЫ	209
С. ПРИНЦИП БОЛЬШОГО ОТКЛОНЕНИЯ, ВКРАТЦЕ	211
Простой случай: оценка Чернова	212
Д. КАЛИБРОВКА В СИТУАЦИИ ПАРЕТО	214
D.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫБОРОЧНОЙ ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЯ ХВОСТА	216
10. ПЕЧАЛЬНО, НО ФАКТ: ДИАГНОСТИКА S&P 500 †	219
10.1. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ КЛАССУ ПАРЕТО И МОМЕНТЫ	219
10.2. КРИТЕРИИ СХОДИМОСТИ	221
10.2.1. Критерий 1: эксцесс при агрегации	221
10.2.2. Максимальные падения	222
10.2.3. Эмпирическая каппа	224
10.2.4. Проверка 2: условное математическое ожидание избытка	225
10.2.5. Проверка 3: неустойчивость 4-го момента	227
10.2.6. Проверка 4: график MS	227
10.2.7. Рекорды и экстремальные значения	228
10.2.8. Асимметричность хвостов справа и слева	231
10.3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ: ПЕЧАЛЬНО, НО ФАКТ	233
Е. ПРОБЛЕМА С ЭКОНОМЕТРИКОЙ	234
E.1. ЭФФЕКТИВНОСТЬ СТАНДАРТНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК РИСКА	235
E.2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ СТАНДАРТНЫХ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК РИСКА	238
Ф. ОСОБЕННОСТИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ	242
F.0.1. Калибровка по углам	245

Часть III. ПРЕДСКАЗАНИЯ, ПРОГНОЗЫ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

11. КАЛИБРОВКА ВЕРОЯТНОСТИ ПРИ ЖИРНЫХ ХВОСТАХ †	249
11.1. Непрерывные и дискретные платежные функции: определения и комментарии	250
11.1.1. Отходим от словесных формулировок	251
11.1.2. При жирных хвостах нет стандартной величины «коллапса», «катастрофы» или «успеха»	255
11.2. МНИМАЯ ПЕРЕОЦЕНКА ХВОСТОВОЙ ВЕРОЯТНОСТИ В ПСИХОЛОГИИ	257
11.2.1. Тонкие хвосты	258
11.2.2. Жирные хвосты	258
11.2.3. Что с чем путают	259
11.2.4. Неопределенность распределения	263
11.3. КАЛИБРОВКА И МНИМАЯ КАЛИБРОВКА	264
11.4. ПОКАЗАТЕЛИ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ	264
11.4.1. Вывод распределений	267
11.5. НЕВЕРБАЛЬНЫЕ ПЛАТЕЖНЫЕ ФУНКЦИИ И МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ	269
11.6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	271
11.7. ПРИЛОЖЕНИЕ: ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ВЫВОД ФОРМУЛ	272

11.7.1. Распределение подсчета пары $P_n^{(P)}$	272
11.7.2. Распределение оценки Брайера.....	272
12. ПРЕДСКАЗАНИЯ ВЫБОРОВ КАК МАРТИНГАЛ: АРБИТРАЖНЫЙ ПОДХОД †	276
12.0.1. Основные результаты.....	278
12.0.2. Организация.....	279
12.0.3. Обсуждение нейтральности к риску	281
12.1. СТОИМОСТЬ В СТИЛЕ БАШЕЛЬЕ	281
12.2. ОГРАНИЧЕННЫЙ ДВОЙСТВЕННЫЙ МАРТИНГАЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС.....	283
12.3. СВЯЗЬ С ОЦЕНЩИКОМ ВЕРОЯТНОСТИ ДЕ ФИНЕТТИ.....	285
12.4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И КОММЕНТАРИИ	286
ПРИЛОЖЕНИЕ: ВСЕ ДОРОГИ ВЕДУТ К ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ	287
Некорректные претензии	287
Неправильная арбитражная стоимость	287
Арбитражные вопросы	288
БЛАГОДАРНОСТИ.....	290

Часть IV. ОЦЕНОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ПРИ ЖИРНЫХ ХВОСТАХ

13. ОЦЕНКА ДЖИНИ ПРИ БЕСКОНЕЧНОЙ ДИСПЕРСИИ †	293
13.1. ВВЕДЕНИЕ.....	293
13.2. АСИМПТОТИКИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ПРИ БЕСКОНЕЧНОЙ ДИСПЕРСИИ	297
13.2.1. Краткое повторение α -устойчивых случайных величин	299
13.2.2. α -устойчивый асимптотический предел индекса Джини.....	300
13.3. ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ.....	301
13.4. ИЛЛЮСТРАЦИЯ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПАРЕТО	302
13.5. ПОПРАВКА НА МАЛУЮ ВЫБОРКУ	304
13.6. ВЫВОДЫ.....	308
Доказательство Теоремы 1	310
14. СУПЕРАДДИТИВНОСТЬ И СМЕЩЕННЫЕ ОЦЕНКИ ВКЛАДА КВАНТИЛЕЙ † ^a	315
14.1. ВВЕДЕНИЕ.....	315
14.2. ОЦЕНКА ДЛЯ НЕСМЕШАННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ХВОСТОМ ПАРЕТО	317
14.2.1. Смещение и сходимость	317
14.3. НЕРАВЕНСТВО АГРЕГАЦИИ НЕРАВЕНСТВ	320
14.4. СМЕШАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ПОКАЗАТЕЛЮ ХВОСТА.....	323
14.5. ЧЕМ БОЛЬШЕ СУММА, ТЕМ ВЫШЕ $\hat{\kappa}_q$	326
14.6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ТОЧНАЯ ОЦЕНКА КОНЦЕНТРАЦИИ	326
14.6.1. Робастные методы и использование полных данных	327
14.6.2. Как правильно оценивать концентрацию?.....	327

Часть V. СТАТЬИ О ТЕНЕВЫХ МОМЕНТАХ

15. ТЕНЕВЫЕ МОМЕНТЫ ЯВЛЕНИЙ С МНИМО БЕСКОНЕЧНЫМ СРЕДНИМ †.....	331
15.1. ВВЕДЕНИЕ.....	331
15.2. ДВОЙСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ	332
15.3. ВЕРНЕМСЯ К Υ : ТЕНЕВОЕ СРЕДНЕЕ, ИЛИ СРЕДНЕЕ ПО ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ.....	334
15.4. СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ МЕТОДАМИ	337
15.5. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ.....	338
16. О ХВОСТОВОМ РИСКЕ ОСТРОГО КОНФЛИКТА (СОВМЕСТНО С П. ЧИРИЛЛО)†.....	340
16.1. ВВЕДЕНИЕ И РЕЗЮМЕ	340
16.2. ОБЗОР СТАТИСТИЧЕСКОЙ ДИСКУССИИ.....	343
16.2.1. Результаты	343
16.2.2. Заключение	345

16.3. ОБСУЖДЕНИЕ МЕТОДОВ.....	345
16.3.1. Метод масштабирования.....	345
16.3.2. Условное математическое ожидание (в нестрогом изложении).....	347
16.3.3. Надежность данных и влияние на хвостовые оценки.....	347
16.3.4. Определение «события».....	349
16.3.5. Пропущенные события.....	349
16.3.6. Систематическая ошибка выжившего.....	350
16.4. АНАЛИЗ ДАННЫХ.....	350
16.4.1. Превышения над порогом.....	350
16.4.2. Интервалы во временных рядах и автокорреляция.....	351
16.4.3. Анализ хвоста.....	352
16.4.4. Альтернативный взгляд на максимумы.....	354
16.4.5. Анализ полных данных.....	355
16.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТЕСТЫ РОБАСТНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ.....	356
16.5.1. Бутстрэп для GPD.....	356
16.5.2. Внесение возмущений в границы оценок.....	357
16.6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ: МИР ОПАСНЕЕ, ЧЕМ КАЖЕТСЯ?.....	358
16.7. БЛАГОДАРНОСТИ.....	359
G. КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ ТРЕТЬЕЙ МИРОВОЙ ВОЙНЫ?*	360

Часть VI. СТАТЬИ О МЕТАВЕРоятНОСТИ

17. КАК ТОЛСТЫЕ ХВОСТЫ ВОЗНИКАЮТ ИЗ РЕКУРСИВНОЙ ЭПИСТЕМОЛОГИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ [†]	367
17.1. МЕТОДЫ И ВЫКЛАДКИ.....	368
17.1.1. Уровни неопределенности.....	368
17.1.2. Интегралы высоких порядков в стандартном гауссовом случае.....	369
РЕЖИМ 1 (ВЗРЫВНОЙ): СЛУЧАЙ ПОСТОЯННОГО ПАРАМЕТРА a	372
17.1.3. Влияние на малые вероятности.....	374
17.2. РЕЖИМ 2: СЛУЧАИ ЗАТУХАЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ an	375
17.2.1. Режим 2-a; «потери» погрешности высокого порядка.....	375
17.2.2. Режим 2-b; второй метод, немультимпликативная погрешность.....	376
17.3. ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ.....	376
18. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ ХВОСТА ПРИ АСИММЕТРИЧНЫХ СТЕПЕННЫХ ЗАКОНАХ [†]	377
18.1. ИСТОРИЯ ВОПРОСА.....	378
18.2. ОДНОХВОСТЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ АЛЬФОЙ.....	378
18.2.1. Общие случаи.....	378
18.2.2. Неравенство стохастической альфы.....	379
18.2.3. Аппроксимации для класса \mathfrak{P}	381
18.3. СУММЫ СТЕПЕННЫХ ЗАКОНОВ.....	381
18.4. АСИММЕТРИЧНЫЕ УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.....	382
18.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРЕТО С ЛОГНОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ АЛЬФЫ.....	383
18.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРЕТО С ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ АЛЬФЫ.....	384
18.7. ОГРАНИЧЕННЫЙ СТЕПЕННОЙ ЗАКОН В РАБОТЕ ЧИРИЛЛО И ТАЛЕБА (2016).....	385
18.8. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ КОММЕНТАРИИ.....	386
18.9. БЛАГОДАРНОСТИ.....	386
19. МЕТАРАСПРЕДЕЛЕНИЕ p -ЗНАЧЕНИЙ И p -ХАКИНГ [†]	387
19.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ВЫВОД ФОРМУЛ.....	389
19.2. ОБРАТНАЯ МОЩНОСТЬ ТЕСТА.....	393
19.3. ПРИЛОЖЕНИЕ И ВЫВОДЫ.....	394
БЛАГОДАРНОСТИ.....	395

Н. НЕКОТОРЫЕ НЕДОРАЗУМЕНИЯ В ПОВЕДЕНЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКЕ.....	396
Н.1. ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ: ЛОЖНАЯ СПЕЦИФИКАЦИЯ БЛИЗОРУКОЙ БОЯЗНИ ПОТЕРЬ.....	396

Часть VII. ТОРГОВЛЯ ОПЦИОНАМИ И ЦЕНЫ ПРИ ЖИРНЫХ ХВОСТАХ

20. НЕУДАЧИ ФИНАНСОВОЙ ТЕОРИИ КАСАТЕЛЬНО ЦЕН ОПЦИОНОВ [†]	403
20.1. БАШЕЛЬЕ, А НЕ БЛЭК — ШОУЛЗ.....	404
20.1.1. Искажения из-за идеализации.....	405
20.1.2. Фактическая процедура репликации.....	406
20.1.3. Провал: погрешность хеджирования может сделать модель непригодной.....	406
21. ЕДИНСТВЕННАЯ МЕРА ДЛЯ ЦЕН ОПЦИОНОВ (БЕЗ ДИНАМИЧЕСКОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ ИЛИ ПОЛНОГО РЫНКА) [‡]	407
21.1. ИСТОРИЯ ВОПРОСА	407
21.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.....	410
21.2.1. Случай 1: форвард как мера, нейтральная к риску	410
21.2.2. Вывод формул.....	411
21.3. СЛУЧАЙ ФОРWARDA БЕЗ НЕЙТРАЛЬНОСТИ К РИСКУ	413
21.4. КОММЕНТАРИЙ.....	413
22. ТОРГОВЦЫ ОПЦИОНАМИ НЕ ПОЛЬЗУЮТСЯ ФОРМУЛОЙ БЛЭКА — ШОУЛЗА — МЕРТОНА ^{*‡}	415
22.1. ПРЕРЫВАНИЕ ЦЕПИ ПЕРЕДАЧИ	415
22.2. ВВЕДЕНИЕ И РЕЗЮМЕ.....	416
22.2.1. Теория Блэка — Шоулза была аргументом в дискуссии	416
22.3. МИФ 1: ТРЕЙДЕРЫ НЕ ЗАДАВАЛИ ЦЕНЫ ОПЦИОНАМ ДО БШМ	420
22.4. МЕТОДЫ И ВЫВОД ФОРМУЛ	421
22.4.1. Формулы опционов и дельта-хеджирование	424
22.5. МИФ 2: СОВРЕМЕННЫЕ ТРЕЙДЕРЫ ПОЛЬЗУЮТСЯ БЛЭКОМ — ШОУЛЗОМ.....	425
22.5.1. Когда мы оцениваем стоимость?	426
22.6. О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НЕВОЗМОЖНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ	426
22.6.1. Сбивающая с толку робастность гауссианы.....	428
22.6.2. Поток заказов и опционы	429
22.6.3. Башелье — Торп.....	430
23. ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ОПЦИОНОВ ПРИ СТЕПЕННЫХ ЗАКОНАХ: РОБАСТНАЯ ЭВРИСТИКА ^{*‡}	431
23.1. ВВЕДЕНИЕ.....	432
23.2. ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ «КОЛЛОВ» ЗА КОНСТАНТОЙ КАРАМАТЫ	432
23.2.1. Первый подход, S в классе правильно меняющихся функций	432
23.2.2. Второй подход, геометрическая доходность от S в классе правильно меняющихся функций.....	434
23.3. ЦЕНЫ ОПЦИОНОВ «ПУТ»	437
23.4. ГРАНИЦЫ АРБИТРАЖА	438
23.5. КОММЕНТАРИЙ.....	438
24. ЧЕТЫРЕ ОШИБКИ В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ ^{*‡}	439
24.1. ПУТАНИЦА МЕЖДУ ВТОРЫМ И ЧЕТВЕРТЫМ МОМЕНТАМИ.....	439
24.2. НЕУЧЕТ НЕРАВЕНСТВА ЙЕНСЕНА ПРИ АНАЛИЗЕ ДОХОДНОСТИ ОПЦИОНОВ	440
24.3. НЕРАЗРЫВНАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ СТРАХОВКОЙ И ПРЕДМЕТОМ СТРАХОВАНИЯ	442
24.4. НЕОБХОДИМОСТЬ МАСШТАБА ЦЕН В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ	442
24.5. ПРИЛОЖЕНИЕ (СТАВКИ НА ХВОСТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ)	443
25. ОГРАНИЧЕНИЯ ХВОСТОВОГО РИСКА И МАКСИМАЛЬНАЯ ЭНТРОПИЯ (СОВМЕСТНО С Д. И Э. ЖИМАН) [‡]	445

25.1. РИСК ЛЕВОГО ХВОСТА КАК ЦЕНТРАЛЬНОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ ПОРТФЕЛЯ	445
25.1.1. Штанга с точки зрения Э. Т. Джейнса	448
25.2. ВЕРНЕМСЯ К ЗАДАНИЮ СРЕДНЕГО И ДИСПЕРСИИ	449
25.2.1. Анализ ограничений	450
25.3. ВЕРНЕМСЯ К ГАУССОВУ СЛУЧАЮ	450
25.3.1. Смесь двух нормальных распределений	452
25.4. МАКСИМАЛЬНАЯ ЭНТРОПИЯ	453
25.4.1. Случай А: ограничиваем глобальное среднее	453
25.4.2. Случай В: ограничиваем абсолютное среднее	455
25.4.3. Случай С: степенные законы для правого хвоста	455
25.4.4. Расширение на несколько периодов: комментарий	457
25.5. КОММЕНТАРИИ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ	458
25.6. ПРИЛОЖЕНИЕ / ДОКАЗАТЕЛЬСТВА	458
ПЕРСОНАЛИИ	459
БИБЛИОГРАФИЯ	467

1 ПРОЛОГ**

Чем хуже вы понимаете мир,
тем проще вам принять решение.



Рисунок 1.1: Проблема не в том, что люди не слышали о «жирном хвосте», а в том, что не понимают серьезность его последствий. Когда вам встретился «жирный хвост», нельзя выбрать из привычного арсенала статистики соответствующий вариант комплекта инструментов; нужно сменить весь подход к принятию решений. © Stefan Gasic

Главная идея в основе проекта *Incerto* — та, что при всей неопределенности и непроницаемости мира и при нехватке информации и понимания все равно в каждой конкретной ситуации оказывается совершенно ясно, какие действия нужно предпринять на основе того немногого, что известно и понятно.

Эта книга состоит из (1) опубликованных статей и (2) бесцензурного комментария, посвященных тем классам статистических распределений, от которых можно ждать экстремальных событий. Мы изучим, как использовать эти распределения для статистических выводов и принятия решений.

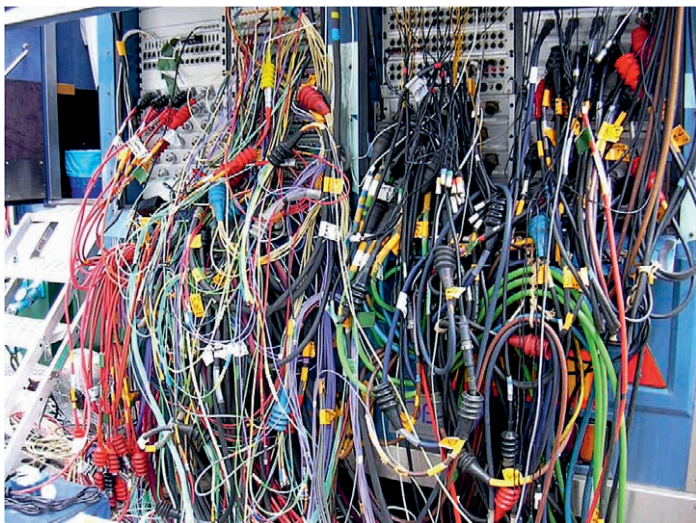


Рисунок 1.2: Усложнение из-за непонимания. Что творится в головах профессионалов, когда они применяют статистику и анализ данных, не имея ясного представления об основных понятиях.
© Wikimedia

«Стандартная» статистика по большей части работает на основе теорем, выведенных для тонких хвостов. Чтобы работать с предасимптотикой¹ жирных хвостов, эти методы придется либо адаптировать нетривиальным образом, либо вовсе исключить из арсенала полезных инструментов.

Автору не раз приходилось слышать фразы вроде «Это и так все знают» и «В жирных хвостах нет ничего нового» — ими пытались защищаться преподаватель или практик, пойманные на совершенно бессмысленной в конкретной ситуации попытке использовать *дисперсию*, *обобщенную авторегрессию*, *коэффициент эксцесса*, *коэффициент Шарпа* или *стоимость под риском* или указать *статистическую значимость* там, где она не значит ничего.

Автор обогатил свой опыт, когда осуществил программу научных исследований и выпустил ряд книг серии *Incerto* [226], посвященных выживанию в реальном мире с его структурой неопределенности, которая слишком сложна для нашего понимания.

Цикл *Incerto* ставит целью объединить пять областей знания, связанных с жирными хвостами и экстремальными событиями: в математике, философии, общественных науках, теории контрактов и теории принятия решений, — с опытом профессионалов. Если вы спросите, при чем здесь теория контрактов и теория принятия решений, то ответ таков: математика опционов основана на идее условной вероятности и объединении контрактов с целью изменить класс воздействия в хвостах распределения; некоторым образом теория опционов — это математическая теория контрактов. Теория принятия решений ставит целью не понять мир, а выбраться из неприятностей и выжить. Этой задаче будет посвящен следующий том *Технического Incerto*, его текущее рабочее название — *Convexity, Risk, and Fragility* («Выпуклость вниз, риск и хрупкость»).

¹ По аналогии с терминами «предыстория» и «доисторический» неологизмы *preasymptotics* и *preasymptotic* можно заимствовать в русский язык как «предасимптотика» и «доасимптотический». — *Здесь и далее, если не указано иное, прим. перев.*

ЗАМЕЧАНИЕ О ТЕРМИНАХ

В академическом контексте при описании распределения часто используется термин «толстые хвосты» (*thick tails*). Мы вместо этого будем говорить, что «коэффициент эксцесса выше, чем у гауссианы»; это ближе к профессиональному жаргону финансиста.

Термин «жирные хвосты» (*fat tails*) мы оставим за особо толстыми хвостами, которые характерны для распределений по степенному закону или эквивалентному (жирный хвост и степенной закон, как мы покажем в Главе 8, неотделимы друг от друга). Некоторые авторы придают «жирным хвостам» более узкий смысл, требуя точного степенного закона или хотя бы правильно меняющейся функции. Однако мы, хотя и будем иногда применять степенные законы (в тех случаях, когда известно, что процесс работает именно так), жирными хвостами будем называть все экстремально толстые хвосты.

Во избежание путаницы не будем пользоваться дополнительными терминами вроде «тяжелых хвостов» (*heavy tails*) или «длинных хвостов» (*long tails*).

Термины «толстые хвосты» и «жирные хвосты» будут прояснены в следующих двух главах.



Рисунок 1.3: Классическая реакция, когда «альтернативой» считается только тот анализ, который рекомендует одобрить кредит. © Stefan Gasic

БЛАГОДАРНОСТИ

Помимо уже названных соавторов, автор благодарен Чжуо Си, Жан-Филипу Бушо, Роберту Фраю, Спиросу Макридакису, Марку Шпицнагелю, Брэндону Ярину, Рафаэлю Дуади, Питеру Карру, Марко Авельянеде, Дидье Сорнетту, Полю Амбре, Бруно Дюпиру, Джамилю Базу, Дамиру Деличу, Яниру Бар-Яму, Диего Цвивовичу, Джозефу Норману, Оле Петерсу, Читпьюниту Манну, Гарри Крейну — и, разумеется, долгим, нескончаемым дискуссиям с великим Бенуа Мандельбротом.

Много опечаток исправили добровольные редакторы в социальных сетях, такие как Максим Бьет, Чао Винчи, Джейсон Торелл и Петри Хэло. Обширный список опечаток и потенциальных нотационных двусмысленностей прислал Кевин Ван Хорн.

Часть статей, ставших главами этой книги, была представлена на конференциях; автор благодарит Лоренца де Гаана, Берта Цварца и других за комментарии по проблемам, связанным с экстремальными значениями. Более точные благодарности сформулированы в конкретных главах. Как обычно, автор хотел бы поблагодарить штат ресторана *Naya* в Нью-Йорке.

Автор представил данную книгу и главные тезисы на ежемесячной конференции Блумберг — Квант¹ в Нью-Йорке в сентябре 2018 года. После лекции ко мне подошел один выдающийся профессор финансовой математики.

— Типичная талебщина, — сказал он. — Вы доказываете, что так-то и так-то нельзя, но взамен не предлагаете альтернатив.

Понятно, что в бизнесе и любой другой сфере, где действует суровая школа реального мира, такой работник долго бы не выжил. Но кто не рискует собственной шкурой [236], до того не доходит, как важно, смотря по обстоятельствам, отложить свои убеждения и как ценны сведения о ненадежности для принятия решений: *не передавай пилоту неточные данные, научись передавать только надежную информацию; сообщая пилоту о неисправности самолета, ты спасаешь жизни*. И до них не доходит, как эффективен подход *via negativa* — когда наука, по Попперу, развивается отсечением неудачных теорий. Покойный Дэвид Фридман предпринял безуспешную попытку укротить маньяков бессмысленного и обманчивого моделирования в статистике, продемонстрировав, как их прогнозы с большим отрывом проигрывают соревнование «ничему», пустой теории.

Между тем в ряде статей и глав этой книги предлагаются решения и альтернативы. Увы, некоторых они не обрадуют, поскольку требуют математических усилий, чтобы построить совершенно другие модели, модели для ситуаций с жирными хвостами.

1 Семинар агентства «Блумберг» по финансовой математике (Bloomberg Quantitative Finance Seminars).

ГЛОССАРИЙ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Это систематический каталог с пояснениями основных разделов и обозначений. Все обозначения разъясняются и в основном тексте; здесь те же пояснения дублируются для удобства читателя, решившего посмотреть только отдельные отрывки. Некоторые обозначения отличаются в той или иной главе, созданной на основе конкретной статьи; здесь это указывается. Иногда наша терминология расходится с терминологией других исследовательских групп, хотя мы старались не противоречить существующим терминам.

2.1. ОБЩИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ЧАСТО ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ СИМВОЛЫ

\mathbb{P} — вероятность случайного события; обычно в форме $\mathbb{P}(X > x)$, где X — случайная величина, а событием считается, что ее реализация превзошла значение x . Более формальные определения событий и вероятностей по канонам теории меры и прочих французский встречаются в Главе 11 и других местах, где этот формализм имеет смысл.

\mathbb{E} — оператор математическое ожидание¹.

\mathbb{V} — оператор дисперсия².

\mathbb{M} — среднее абсолютное отклонение;³ если центрируется, то относительно среднего (а не медианы).

1 От англ. *expected value* или *mathematical expectation*. В русской литературе обозначается также M , но в этой книге обозначение $M(k) = \mu_k$ зарезервировано за статистическим моментом порядка k . Если случайная величина X принимает значения на множестве всех действительных чисел \mathbb{R} , то $\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$, где $f_X(x)$ — плотность вероятности. В этой книге часто используется линейность математического ожидания: $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$, даже если между случайными величинами X и Y есть корреляция, — и мультипликативность математического ожидания в случае независимых случайных величин: $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X \mathbb{E}Y$.

2 От англ. *variance*. В русской литературе обозначается также D . Если случайная величина X принимает значения на \mathbb{R} , то $\mathbb{V}X = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}X)^2 f_X(x) dx$, где $f_X(x)$ — плотность вероятности. Другими словами, $\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$. В этой книге часто используется тождество $\mathbb{V}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$.

3 От англ. *mean absolute deviation*. В литературе встречается также обозначение MAD, но в этой книге MAD зарезервировано за средним абсолютным отклонением от медианы, а не от среднего. Если случайная величина X принимает значения на \mathbb{R} , то $\mathbb{M}X = \int_{\mathbb{R}} |x - \mathbb{E}X| f_X(x) dx$, где $f_X(x)$ — плотность вероятности.

$\varphi(\cdot)$ и $f(\cdot)$ обычно зарезервированы за плотностью вероятности заранее указанного распределения. В некоторых главах делается различие между $f_X(x)$ и $f_Y(y)$, особенно когда случайные величины X и Y следуют двум разным распределениям.

n обычно зарезервировано за числом слагаемых.

p обычно зарезервировано за порядком момента.

НСВ — непрерывная случайная величина¹.

$F(\cdot)$ обычно зарезервировано за функцией распределения, то есть $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$. Функция выживания $\mathbb{P}(X > x)$ записывается с чертой сверху, $\bar{F}(\cdot)$ или обозначается буквой S^2 .

\sim означает, что случайная величина по одну сторону от тильды распределена согласно закону, указанному по другую сторону от тильды.

$\chi(t) = \mathbb{E} e^{itX_s}$ — характеристическая функция случайной величины X_s . Иногда для аргумента $t \in \mathbb{R}$ используется другая буква — ω . Сама характеристическая функция иногда обозначается заглавной Ψ^3 .

\xrightarrow{D} означает сходимость по распределению, то есть следующее. Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность случайных величин; тогда $X_n \xrightarrow{D} X$ означает, что последовательность соответствующих функций распределения F_n имеет предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

при всяком действительном x , при котором F непрерывна.

\xrightarrow{P} означает сходимость по вероятности, то есть что при $\varepsilon > 0$ для описанной выше последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

$\xrightarrow{a.s.}$ означает сходимость почти наверное⁴, то есть более сильное требование:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1.$$

S_n обычно обозначает сумму n слагаемых.

α , а также α_p и α_s . Во избежание двусмысленности мы будем прибегать к двум обозначениям: $\alpha_s \in (0, 2]$ для показателя хвоста платонического (предельного) устойчивого распределения; $\alpha_p \in (0, \infty)$ для показателя хвоста в распределении Парето (доасимптотическом). В недвусмысленном контексте можем обходиться просто α .

$\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ — нормальное (гауссово) распределение со средним μ_1 и дисперсией σ_1^2 ⁵.

Другими словами, $\mathbb{M}X = \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|$. Известна теорема: $\mathbb{M}X \leq \sqrt{\mathbb{V}X}$; это следствие неравенства Йенсена. «Центрировать», то есть вычитать $\mathbb{E}X$, приходится в тех случаях, где $\mathbb{E}X \neq 0$.

1 Это традиционное сокращение в русской литературе. В оригинале традиционное английское сокращение, г. в. от *random variable*.

2 От англ. *survival function*. В русской литературе называется также функцией надежности и обозначается буквой R , от англ. *reliability function*. Вместо особых обозначений $\bar{F}(\cdot)$, $S(\cdot)$, $R(\cdot)$ часто просто выписывают разность $1 - F(\cdot)$.

3 В литературе можно встретить также обозначение $\varphi(t)$.

4 От англ. *almost sure*. Синонимы: сходимость почти всюду (*almost everywhere*), сходимость почти всегда (*almost always*).

5 Случай $\mathcal{N}(0, 1)$ называется стандартным нормальным распределением, и его функцию распределения иногда обозначают Φ , без параметров. Тогда для произвольного нормального распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ или $\mathcal{LN}(\cdot, \cdot)$ — логнормальное распределение, с плотностью $f^{(L)}(\cdot)$. Здесь обычно параметры указываются как $\mathcal{L}\left(X_0 - \frac{1}{\sigma^2}, \sigma\right)$; тогда математическое ожидание X_0 и дисперсия $(e^{\sigma^2} - 1)X_0^2$ ¹.

$S(\alpha_S, \beta, \mu, \sigma)$ — устойчивое распределение с показателем хвоста $\alpha_S \in (0, 2]$, коэффициентом симметрии β в интервале $(-1, 1)$, коэффициентом положения $\mu \in \mathbb{R}$ и коэффициентом масштаба $\sigma > 0$.

\mathfrak{P} — класс степенного закона (см. ниже).

\mathfrak{S} — субэкспоненциальный класс (см. ниже).

$\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

$\vartheta(\cdot)$ — тета-функция Хевисайда².

$\text{erf}(\cdot)$ — функция ошибок, представляющая собой интеграл плотности гауссова распределения³

$$\text{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt e^{-t^2}.$$

функция распределения $\Phi_{\mu, \sigma}$ представима через стандартную: $\Phi_{\mu, \sigma}(z) = \Phi\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)$. Автор поступает так в разделе 2.2.3 Центральная предельная теорема (ЦПТ).

Параметр $\sigma > 0$ называют коэффициентом масштаба или среднеквадратическим отклонением; встречаются также синонимы среднеквадратичное отклонение, стандартное отклонение, STD.

Для гауссова распределения со средним μ и масштабом σ плотность вероятности $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$, дисперсия σ^2 , коэффициент асимметрии 0, эксцесс 3, четвертый кумулянт 0 и прочие кумулянты 0. Для суммы n случайных н. о. р. по Гауссу величин последовательность кумулянтов $\kappa_n^1 = n\mu$, $\kappa_n^2 = n\sigma^2$, $\kappa_n^3 = 0$ и далее только нули; соответственно $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n^r = 0$.

1 Логнормальное распределение — это распределение случайной величины e^Y , где Y — гауссова случайная величина. Если гауссова случайная величина Y имеет среднее μ и дисперсию σ^2 , то логнормальная случайная величина $X = e^Y$ имеет среднее $X_0 = e^{\mu + \sigma^2/2}$ и дисперсию $(e^{\sigma^2} - 1)X_0^2$. Величина $X = e^Y$ принимает только положительные значения; ее распределение одногорбое и несимметричное. Плотность вероятности $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$; медиана $e^\mu = X_0 e^{-\sigma^2/2}$, мода $e^{\mu - \sigma^2} = X_0 e^{-3\sigma^2/2}$, коэффициент асимметрии $(e^{\sigma^2} + 2)\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$, коэффициент эксцесса $e^{4\sigma^2} + 2 e^{3\sigma^2} + 3 e^{2\sigma^2} - 6$.

2 (*Heaviside step function*) Функция ступенька в нуле, $\vartheta(x) \triangleq \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Если нужна ступенька в произвольной точке K , используют $\vartheta_K(x) = \begin{cases} 1, & x \geq K \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \vartheta(x - K)$; можно представить и через индексную функцию $\mathbb{1}_{x \geq K}$.

Иногда считают, что $\vartheta(x) \triangleq \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$; такое разнотчение $\vartheta(0)$ несущественно при моделировании вероятностных распределений, потому что не влияет на интегралы.

В этой книге функция Хевисайда обозначается некурсивной ϑ , чтобы отличать от локального использования ϑ для произвольного параметра или функции. Аналогичным образом мнимая единица обозначается некурсивной i , а число Архимеда обозначается некурсивной π , чтобы отличать от локального использования i или π для произвольного параметра или функции.

3 Связь с нормальным распределением такая: интегрируется функция плотности $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ распределения $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, нормального распределения со средним 0 и среднеквадратическим отклонением $\frac{1}{\sqrt{2}}$, причем нижний предел интеграла 0 и результат умножен на 2. Можно связать со стандартным нормальным распределением и так: $\Phi(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \text{erf} \frac{z}{\sqrt{2}}\right)$.

Более удобная связь: в пределы $\mu \pm a\sigma$ попадает $\text{erf} \frac{a\sqrt{2}}{2}$ всех нормально распределенных наблюдений. Например, в пределы $\pm \sigma$ попадает $\text{erf} \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 68,2\%$ наблюдений.

$\operatorname{erfc}(\cdot)$ — дополнительная функция ошибок, $1 - \operatorname{erf}(z)$.

$\|\cdot\|_p$ — норма; в этой книге¹ применяется к действительному вектору $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ и определяется как

$$\|\mathbf{X}\|_p \triangleq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Обратите внимание, что компоненты вектора берутся по абсолютной величине.

${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$ — вырожденная гипергеометрическая функция:

$${}_1F_1(a; b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} \frac{z^k}{k!}.$$

${}_2\tilde{F}_2(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot; \cdot)$ — регуляризация обобщенной гипергеометрической функции ${}_2F_2$:

$${}_2\tilde{F}_2(a_1, a_2; b_1, b_2; z) \triangleq {}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; z) \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)},$$

где обобщенная гипергеометрическая функция ${}_pF_q(\cdot; \cdot; \cdot)$ раскладывается в ряд

$${}_pF_q(a; b; z) \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}$$

с использованием символа Похгаммера² $(a)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (a + i)$.

2.2. СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ КАТАЛОГ ОБЩИХ И ИДИОСИНКРАЗИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

Ниже дублируются определения из основных разделов.

2.2.1. Класс степенного закона \mathfrak{F}

Принято определять класс степенного закона по свойству функции выживания следующим образом.

Пусть X — случайная величина из класса распределений с правым хвостом, подчиняющимся *степенному закону*, то есть:

$$\mathbb{P}(X > x) = L(x) x^{-\alpha}, \quad (2.1)$$

где $L: [x_{\min}, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ — медленно меняющаяся функция, определяемая требованием

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(kx)}{L(x)} = 1$$

для всех $k > 0$ [22].

¹ В литературе также p -нормой называют Гёльдерову ℓ_p -норму $\left(\sum_{i=1}^n |X_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, без деления на n .

² Так символ Похгаммера используется в литературе по гипергеометрической функции. В литературе по комбинаторике как $(a)_n$ обозначают убывающий факториал $\prod_{i=0}^{n-1} (a-i)$, тогда как возрастающий факториал $\prod_{i=0}^{n-1} (a+i)$ там обозначают $(a)^{(n)}$.

Тогда говорят, что функция выживания случайной величины X принадлежит классу *правильно меняющихся на бесконечности функций* RV_α^1 .

Давайте уточним: функция $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ меняется на бесконечности с показателем ρ , то есть $f \in RV_\rho$, когда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^{\rho^2}.$$

С практической точки зрения это значит, что рано или поздно $L(x)$ подходит к своему пределу l и становится константой, которую мы будем называть *константой Караматы*; рубеж, где достигается константа, будем называть *точкой Караматы*. За этой точкой хвосты степенного закона калибруются стандартными методами, такими как характеристика Хилла. Б. Мандельброт называл распределение в этой области *сильным законом Парето* [162], [75].

То же верно при соответствующих оговорках для левых хвостов.

2.2.2. Закон больших чисел (слабый)

Обычно его представляют так. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — бесконечная последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, интегрируемых по Лебегу, с математическим ожиданием $\mathbb{E} X_i = \mu$ (вообще говоря, требование н. о. р. можно до некоторой степени ослабить).

Тогда выборочное среднее первых n величин $\bar{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ сходится к математическому ожиданию, $\bar{X}_n \rightarrow \mu$ при $n \rightarrow \infty$.

Конечность дисперсии не обязательна (однако весьма желательна: если дисперсия и прочие высшие моменты распределения конечны, то \bar{X}_n сходится быстрее).

Когда потребуется, рассмотрим и сильный закон больших чисел.

2.2.3. Центральная предельная теорема (ЦПТ)

Классический вариант ЦПТ, теорема Линдберга-Леви, утверждает следующее. Пусть дана последовательность X_i н. о. р. величин с $\mathbb{E} X_i = \mu$ и $\mathbb{V} X_i = \sigma^2 < +\infty$, и пусть \bar{X}_n — это среднее по выборке первых n величин. Тогда по мере приближения n к бесконечности центрированное и нормированное среднее $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ сходится по распределению к гауссову [20] [21]

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

1 От англ. *regularly varying*.

2 Теория строится так. Функция $f(t)$ правильно меняется на бесконечности, если $\forall x \in \mathbb{R}^+$ существует и конечен предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{f(tx)}{f(t)} \right|$. Согласно теореме Караматы, такая функция представима в виде степенного закона t^ρ с точностью до медленно меняющегося множителя $L(t): f(t) = L(t) t^\rho$.

Очевидным образом верно и обратное: для функции вида $f(t) = L(t) t^\rho$ и числа $x \in \mathbb{R}^+$ предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{f(tx)}{f(t)} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{L(tx)(tx)^\rho}{L(t)t^\rho} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{L(tx)}{L(t)} \right| \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{(tx)^\rho}{t^\rho} \right| = 1 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} |x^\rho| = x^\rho.$$

Сходимость по распределению означает, что функция распределения для $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ поточечно сходится к $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, то есть что для всякого действительного z

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \leq z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq \frac{z}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right), \sigma > 0,$$

где $\Phi(z)$ — значение стандартного нормального распределения в точке z .

Есть ряд других вариантов ЦПТ, которые мы представим по мере надобности.

2.2.4. Закон средних чисел, или Предасимптотика

Это центральная тема этой книги. Нас интересует поведение случайной величины для умеренно большого n , или предасимптотика. Вопрос не так актуален для гауссова распределения, поскольку оно сходится быстро (в силу ЗБЧ и ЦПТ); другое дело — негауссовы случайные величины.

Смотрите далее в разделе о показателе каппа.

2.2.5. Показатель каппа

Здесь показатель не в алгебраическом смысле, как показатель степени, а в инженерном, как количественный параметр машины¹. Каппа оценивает доасимптотическое поведение случайной величины. Этот показатель разработан автором, как описано в Главе 8 и статье [235]. Каппа пробегает интервал $[0, 1]$; $\kappa = 0$ для гауссовой случайной величины и $\kappa = 1$ для распределения Коши или иной случайной величины, не имеющей математического ожидания².

Пусть X_1, \dots, X_n, \dots — случайные величины н. о. р. с конечным математическим ожиданием, то есть $\mathbb{E} X < +\infty$. Пусть $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ — частичная сумма. Пусть $\mathbb{M}(n) = \mathbb{E}|S_n - \mathbb{E} S_n|$ — математическое ожидание абсолютного отклонения частичной суммы n слагаемых от математического ожидания этой суммы (как мы уже предупреждали, у нас отклонение отсчитывается не от медианы, а от среднего). Определим *скорость* сходимости при увеличении числа слагаемых от n_0 до n :

$$\frac{\mathbb{M}(n)}{\mathbb{M}(n_0)} = \left(\frac{n}{n_0}\right)^{1/2 - \kappa_{n_0, n}}, \quad (2.2)$$

где $n_0, n = 1, 2, \dots$ и $n > n_0 \geq 1$; соответственно

$$\kappa_{n_0, n} = 2 - \frac{\ln n - \ln n_0}{\ln \frac{\mathbb{M}(n)}{\mathbb{M}(n_0)}}. \quad (2.3)$$

¹ В оригинале автор делает другую оговорку, из-за иной омонимии: что *Kappa metric* — не метрика в смысле расстояния в той или иной геометрии, а метрика в инженерном смысле.

² Как и дисперсии.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться значениями $n = n_0 + 1$ и сокращать обозначение до κ_n .

2.2.6. Эллиптическое распределение

О случайном векторе \mathbf{X} размерности $p \times 1$ говорят, что у него эллиптическое распределение (или распределение с эллиптическим контуром) с параметрами положения μ , неотрицательной матрицей Σ и некоторой скалярной функцией Ψ , если характеристическая функция представима в виде $\exp(it'\mu)\Psi(t\Sigma t')$.

С практической точки зрения эллиптическое распределение должно собираться из распределений с одной и той же ковариационной матрицей. Переключение режима или стохастические ковариации (корреляции) мешают распределению быть эллиптическим. И мы покажем в Главе 6, что линейная комбинация случайных величин, следующих распределением с тонким хвостом, способна генерировать взрывные толстохвостые свойства, когда эллиптичность нарушается. Этот эффект, наряду со случаями жирного хвоста, делает несостоятельной значительную часть современной финансовой науки.

2.2.7. Статистическая независимость

Независимость между двумя случайными величинами X и Y с частными функциями плотности вероятности $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ и совместной функцией плотности вероятности $f(x, y)$ определяется тождеством:

$$\frac{f(x, y)}{f_X(x)f_Y(y)} = 1,$$

независимо от коэффициента корреляции. В классе эллиптических распределений, когда совместное гауссово распределение имеет коэффициент корреляции 0, случайные величины независимы, и некоррелированы. Иначе обстоит дело с многомерными формами t -распределения Стьюдента или распределения Коши.

2.2.8. Устойчивое распределение (устойчивое по Леви)

Это обобщение ЦПТ.

Пусть X_1, \dots, X_n — независимые одинаково распределенные случайные величины. Рассмотрим их сумму S_n . Теорема утверждает, что

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{D} X_S, \quad (2.4)$$

где X_S следует устойчивому распределению S , a_n и b_n — нормирующие константы, а \xrightarrow{D} , как вы помните, означает сходимость по распределению (распределению X при $n \rightarrow \infty$).

Свойства S будут должным образом определены и рассмотрены в следующей главе. Пока заметим, что про случайную величину X_S говорят, что она следует устой-

чивому (или α -устойчивому) распределению, и пишут $X_S \sim S(\alpha_s, \beta, \mu, \sigma)$, если ее характеристическая функция $\chi(t) = \mathbb{E}e^{itX_S}$ имеет вид:

$$\chi(t) = \exp\left(i\mu t - |\sigma t|^{\alpha_s} \left(1 - i\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha_s}{2} \operatorname{sgn} t\right)\right), \text{ где } \alpha_s \neq 1. \quad (2.5)$$

Ограничения: $-1 \leq \beta \leq 1$ и $0 < \alpha_s \leq 2$ ¹.

2.2.9. Многомерное устойчивое распределение

О случайном векторе $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^\top$ говорят, что он имеет многомерное устойчивое распределение, если каждая линейная комбинация его компонент $Y = a_1X_1 + \dots + a_kX_k$ имеет устойчивое распределение. То есть каждая векторная константа $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ должна давать устойчивое одномерное распределение для случайной величины $Y = \mathbf{a}\mathbf{X}$.

2.2.10. Точка Караматы

См. Класс степенного закона.

2.2.11. Субэкспоненциальность

Естественной границей между Медиокристаном² и Экстремистаном служит субэкспоненциальный класс, обладающий следующим свойством.

Пусть X_1, \dots, X_n — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с носителем в (\mathbb{R}^+) и кумулятивной функцией распределения F .

Субэкспоненциальный класс определяется требованием (см. [248], [196]):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{1 - F(x)} = 2, \quad (2.6)$$

где $F^{*2} = F' * F$ — это кумулятивное распределение $X_1 + X_2$, суммы двух независимых копий случайной величины X . Требование означает, что вероятность того, что сумма $X_1 + X_2$ превысит значение x , вдвое выше вероятности того, что значение x будет пре-

1 Устойчивому распределению, оно же α -устойчивое по Леви, следует в пределе сумма n независимых случайных величин при $n \rightarrow \infty$; в случае слагаемых с конечной дисперсией сумма в пределе гауссова, а в более общем случае — нет. Устойчивым это распределение названо потому, что для двух н. о. р. X_1 и X_2 линейная комбинация вида $aX_1 + bX_2$ следует распределению вида $cX_1 + d$.

При $\alpha_s < 1$ и $\beta = 1$ устойчивое распределение одностороннее, $X \in [\mu, +\infty)$; при $\alpha_s < 1$ и $\beta = -1$ устойчивое распределение одностороннее, $X \in (-\infty, \mu]$; в остальных случаях носитель \mathbb{R} . При $\beta = 0$ устойчивое распределение симметричное. При $\alpha_s = 1$ превращается в распределение Коши, при $\alpha_s = 2$ превращается в гауссово распределение. При $1 < \alpha_s < 2$ и $\beta = 1$ называется распределением Парето.

Среднее равно коэффициенту положения μ при $\alpha_s > 1$; иначе не существует. Дисперсия $2\sigma^2$ при $\alpha_s = 2$; иначе бесконечна. Коэффициент асимметрии 0 при $\alpha_s = 2$; иначе не существует. Эксцесс 3 при $\alpha_s = 2$; иначе не существует.

2 Медиокристан и Экстремистан — вымышленные области, от англ. *mediocre* (заурядность) и *extreme* (крайность).